



Les cyclotrons

J. Fermé

► To cite this version:

| J. Fermé. Les cyclotrons. 1995. in2p3-00355663

HAL Id: in2p3-00355663

<https://hal.in2p3.fr/in2p3-00355663>

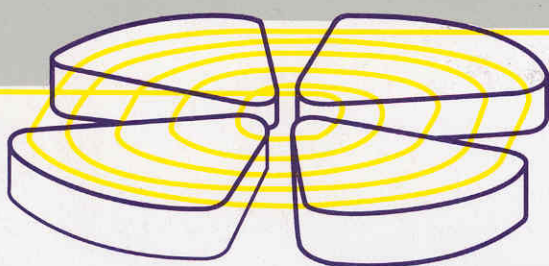
Submitted on 23 Jan 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

GANIL

GRAND ACCELERATEUR NATIONAL D'IONS LOURDS - CAEN
LABORATOIRE COMMUN IN2P3 (CNRS) - D.S.M. (CEA)



Les cyclotrons

Jacques Fermé

Ecole " Introduction à la dynamique des faisceaux et aux accélérateurs de particules "

I.N.2.P.3. Formation permanente.

(Révisé en Juillet 1995)

GANIL R 95 02

Introduction.

Ce cours sur les cyclotrons est une version mise à jour du document qui a été remis aux stagiaires de l'école de Formation Permanente de l'IN2P3 sur la dynamique des faisceaux et sur les accélérateurs, qui a siégé du 22 au 28 janvier 1995 à La Londe Les Maures.

Il se présente sous la forme d'un exposé général, destiné aux personnes qui ne sont pas familiarisées avec les cyclotrons.

Pour faciliter la tâche du lecteur, nous avons joint à ce cours la copie des références particulières citées dans le texte. Ces références ont été retenues pour leur intérêt propre, et aussi parce qu'elles constituent un point de départ éventuel vers d'autres sources d'information.

Le lecteur qui voudra approfondir ses connaissances devra se livrer à l'étude des ouvrages de base (références n° 1 à 3), qui sont d'un intérêt essentiel bien qu'ils ne soient pas récents, et compléter les notions théoriques ainsi acquises par la compilation des compte-rendus des conférences internationales sur les cyclotrons, dont nous fournissons les références.

Une importance particulière a été donnée à l'étude de la dynamique au premier ordre, car elle est fondamentale dans ce type d'accélérateur. Assurément, les aberrations du second ordre (et d'ordre supérieur) existent, principalement du fait de la variation non linéaire du champ accélérateur en fonction du temps. Mais ces aberrations ne doivent pas être considérées comme une fatalité, et l'histoire du développement des cyclotrons, montre que l'on progresse dans le sens d'un fonctionnement linéaire.

Nous avons placé à la fin du texte un certain nombre de figures accompagnées de commentaires. Ces figures sont destinées à appuyer un exposé oral. Elles sont suivies de trois annexes qui viennent en complément d'information.

Table des matières.

Page	1	Introduction.
Page	2	Table des matières.
Pages	3 à 8	La place des cyclotrons dans l'histoire des accélérateurs.
Pages	9 à 38	Théorie du cyclotron isochrone. Isochronisme, loi de champ radiale, accélération, variation d'énergie. Stabilité d'un groupe de particules, nombres d'onde, loi de champ azimutale. Emittance, effets non linéaires, charge d'espace, groupement longitudinal. Résonances. Injection et extraction d'un faisceau de particules. Couplages de cyclotrons. Compression de phase. Pouvoir séparateur.
Pages	39 à 49	Conception et réalisation d'un cyclotron. Options technologiques : champ magnétique, système accélérateur, sources d'ions, vide. Constitution d'un projet. Radio-protection. Aide apportée par le calcul numérique.
Pages	50 à 54	Les différentes classes de cyclotrons. Les grands cyclotrons à protons. Les cyclotrons à ions lourds. Applications des cyclotrons.
Pages	55 à 63	Conduite des cyclotrons. Affichage des paramètres. Réglage initial du faisceau. Maintien du faisceau. Changements d'énergie. Equipements de diagnostic du faisceau. Assistance informatique en ligne et hors ligne.
Pages	64 à 67	Vocabulaire spécialisé.
Pages	68 à 74	Formulaire.
Pages	75 à 80	Références et documentation.
Pages suivantes		Figures et annexes.

Deuxième partie : **Reproduction de certaines publications de référence.**

La place des cyclotrons dans l'histoire des accélérateurs de particules

En **1878** William Crooks, en étudiant le passage du courant à haute tension à l'intérieur de tubes en verre où le vide avait été fait, remarqua une étrange lueur bleutée.

La vraie nature de ce faisceau de lumière observé à l'intérieur de ces *tubes à rayonnement cathodique* ne fut découverte qu'en **1897**, par Joseph John Thomson. Il s'agissait en fait d'un faisceau de *corpuscules*, chargées électriquement et de très faible masse. Ces particules étaient accélérées par la différence de potentiel établie entre un filament chauffé, la cathode, et une anode.

Bien que J. J. Thomson ait persisté pendant des années à employer le terme de "corpuscule", c'est celui d'"électron", correspondant à la charge électrique élémentaire des chimistes, qui prévalut.

L'histoire des accélérateurs de particules remonte donc à la fin du dix neuvième siècle.

Deux années plus tôt, en **1895**, Konrad Roentgen, avait découvert que les tubes à rayons cathodiques émettaient autour d'eux un rayonnement aux propriétés étonnantes : totalement invisible, ce rayonnement ne pouvait être décelé qu'au moyen de pellicules photographiques ; il était très pénétrant et permettait d'obtenir par transparence des images du corps humain. D'où le nom de " rayons X " attribué à ce rayonnement étrange.

Entre temps, en **1896**, une autre découverte extraordinaire avait été faite. Henri Becquerel, en étudiant la fluorescence des sels d'Uranium, avait remarqué que ceux-ci émettaient spontanément de mystérieux rayonnements, très pénétrants, que ces sels aient été exposés à la lumière ou non. Il s'agissait donc d'un phénomène essentiellement distinct de celui de la fluorescence.

Dans les années qui suivirent, les travaux de Pierre et Marie Curie conduisirent à la découverte de nouveaux corps ayant des propriétés analogues à celles de l'Uranium: le Polonium, le Radium, le Thorium. Trois sortes de rayonnement furent observées, appelées respectivement α , β , et γ . Tous ces corps aux propriétés particulières furent qualifiés de "radioactifs".

En 1911, Ernest Rutherford, en étudiant le comportement surprenant du rayonnement α lors de son impact sur une cible, arriva à la conclusion que les atomes ne sont pas constitués, comme on le croyait alors, de matière uniformément répartie. Ses expériences montrèrent que les atomes possèdent un noyau de diamètre relativement très petit contenant la majeure partie de la masse totale ("une mouche dans une cathédrale"). Le noyau, chargé positivement, est entouré d'un cortège d'électrons dont la charge totale est égale et de signe opposé.

Ultérieurement, le rayonnement α fut reconnu comme étant l'émission, par les corps radioactifs, de noyaux d'Hélium, et le rayonnement β comme étant une émission d'électrons.

Niels Bohr publia en 1913 un modèle précis de la structure de l'atome. Les électrons gravitent autour du noyau sur des couches bien déterminées. Un électron a la possibilité de passer d'une couche à l'autre en émettant un quantum d'énergie, le photon. C'est la disposition des électrons de la couche externe qui détermine les propriétés chimiques de l'atome. La théorie de Niels Bohr est à la base de la mécanique quantique.

En 1919, utilisant l'émission α du Radium (ions Hélium possédant une énergie de 8 MeV), Rutherford bombarda de l'Azote et le transforma en Oxygène, réalisant ainsi la première "transmutation" de la matière.

Cette expérience qui pour la première fois mettait en cause le noyau (nucleus) de l'atome, différait fondamentalement des réactions chimiques qui, elles, ne modifient pas l'identité des corps simples mis en œuvre. Une branche nouvelle de la Physique, relative au noyau lui-même de l'atome, venait de s'ouvrir. Elle prit ultérieurement le nom de Physique Nucléaire.

Parallèlement, et indépendamment des recherches entreprises sur la nature du noyau, le désir d'obtenir des rayons X de plus en plus "pénétrants" avait conduit à mettre au point des générateurs de tension d'accélération pouvant atteindre 100 kilovolts. Au-delà, la technique de l'époque se heurtait au problème du claquage.

Dans le but d'éliminer les risques de claquage, Joseph Slepian, en 1922, proposa d'accélérer des électrons non pas directement à l'aide d'un champ électrique, mais par le biais d'un champ magnétique variable générant, conformément aux lois de Maxwell, le champ électrique nécessaire à l'accélération. Cette proposition n'aboutit à une réalisation que bien plus tard, en 1940, à la suite d'études faites en particulier par Rolf Wideroë et Donald William Kerst sur la stabilité des trajectoires.

Cet accélérateur d'électrons très ingénieux fut nommé Bétatron, nom qui rappelait que le rayonnement β naturel n'était autre qu'une émission d'électrons. Quelques exemplaires furent construits, mais le principe d'accélération sur lequel il était basé resta sans suite.

C'est en 1927 que l'idée d'une utilisation des accélérateurs de particules pour la recherche nucléaire prit vraiment son essor. Cette année-là, Rutherford, s'adressant aux membres la Royal Society, dont il était le président, exprima son espoir que les progrès réalisés dans le domaine des accélérateurs d'électrons pourraient être mis à profit pour la construction d'accélérateurs d'ions capables de surpasser, tant du point de vue de l'énergie que de la variété des ions, les sources naturelles de rayonnement utilisées jusqu'alors pour les études portant sur le noyau.

Cette proposition impliquait un travail de recherche dans le domaine jusqu'alors inexploré de la production de très hautes tensions, ce qui prit beaucoup de temps. En 1932, à Cambridge, au laboratoire de Cavendish, sous la direction de Rutherford, et après des années d'un travail sans cesse remis en cause par les problèmes de claquage, John Cockroft et Ernest Walton réussirent enfin à mettre au point un accélérateur électrostatique pouvant atteindre 400 kilovolts, une performance remarquable, mais encore beaucoup trop modeste pour espérer atteindre l'énergie des particules α des sources radioactives.

Cet accélérateur présentait l'avantage de pouvoir aussi accélérer des protons (noyaux d'hydrogène), un type de particule que ne produisent pas les sources naturelles. Le flux de particules accélérées était très important, mais la tension disponible était considérée comme tout à fait insuffisante pour provoquer la désintégration de noyaux,

Néanmoins, sous l'impulsion de Rutherford, et encouragés par le théoricien George Gamow dont la démarche brillante s'appuyait sur le principe probabiliste de la toute nouvelle mécanique ondulatoire, Cockroft et Walton se lancèrent dans une expérience de bombardement d'une cible de Lithium par un faisceau de protons. A leur grande surprise, ils constatèrent que le faisceau de protons, particules plus pénétrantes que les noyaux d'Hélium, était capable de provoquer des désintégrations nucléaires dans le Lithium, bien en dessous du seuil d'énergie estimé, confirmant ainsi l'audacieuse théorie de Gamow. Cette expérience, restée célèbre, donna une nouvelle impulsion au développement des accélérateurs.

Les accélérateurs électrostatiques étant limités par les tensions de claquage, d'autres méthodes d'accélération avaient déjà été recherchées. Dès 1925 Gustaf Ising avait lancé l'idée d'un accélérateur composé d'une série d'électrodes alimentées par une tension alternative, dispositif ingénieux qui devait permettre d'atteindre une énergie finale importante, sans devoir mettre en jeu des potentiels élevés.

Rolf Wideroë, ingénieur électricien de formation, bien que principalement intéressé par la génération de hautes tensions nécessaires au transport économique de l'électricité sur de longues

distances, eut l'idée de construire, c'était en 1928, un accélérateur basé sur le principe indiqué par Ising, et il réussit à le faire fonctionner. Ce premier accélérateur à champ alternatif était de dimensions et de performances fort modestes. Mais la validité du principe de l'accélération "cyclique" était démontrée, ce qui ouvrait la voie à des réalisations capables de surpasser les accélérateurs électrostatiques. Il est intéressant de remarquer que les ions utilisés par Widerøe étaient des ions lourds : Sodium et Potassium.

Les accélérateurs appelés "linéaires", construits sur le modèle de Widerøe devaient connaître un développement rapide après la deuxième guerre mondiale, à la suite de la mise au point de puissants amplificateurs en hyperfréquences : les klystrons. Alvarez développa une version similaire d'accélérateur linéaire. Parmi les réalisations, limitons-nous à citer l'ancien accélérateur d'électrons de 2 GeV d'Orsay, l'accélérateur à protons LAMPF de 800 MeV de Los Alamos (New Mexico), l'accélérateur à électrons et positrons de 22 GeV de Stanford (Californie), le linéaire HILAC à Berkeley, l'accélérateur à ions lourds UNILAC de Darmstadt (Allemagne). L'application relativement récente de la supraconductivité au système accélérateur a permis de réaliser des installations plus compactes et beaucoup moins dispendieuses en énergie.

En 1930, à Berkeley, s'inspirant des récents travaux de Widerøe, Ernest Lawrence conçut le principe du cyclotron isochrone. Il se basait sur la propriété suivante : un ion, placé dans un champ magnétique uniforme, possède une période de révolution indépendante de son énergie, du moins en première approximation. Cette propriété ouvrait la possibilité d'accélérer de façon répétitive des ions groupés en paquets à l'aide du champ électrique alternatif produit par deux électrodes seulement, installées à l'intérieur d'un champ magnétique uniforme, le tout étant placé sous vide, comme il se doit pour toute accélération de particules. La seule condition à respecter était la synchronisation de la fréquence de révolution dans le champ magnétique avec la fréquence accélératrice.

Le premier cyclotron fonctionna en 1931. Construit par Stanley Livingston, la chambre accélératrice de ce cyclotron était de très petites dimensions : 10 centimètres de diamètre. Le deuxième modèle, mis en service l'année suivante, avait 25 centimètres de diamètre et il produisit des protons de 1 MeV. Le cyclotron suivant, d'un diamètre de pôles de 37 pouces, soit un peu moins d'un mètre, permit en 1936 d'atteindre 8 MeV d'énergie totale en deutons (le deutérium est un isotope de l'hydrogène). Enfin le cyclotron *Crocker* d'un diamètre de 60 pouces fut mis en service en 1939. Ce cyclotron, qui atteignait une énergie de 10 MeV par nucléon, était destiné à la production de neutrons pour usage médical. Rappelons que dès 1932 James Chadwick avait mis en évidence l'existence de cette particule dépourvue de charge électrique. Les faisceaux de deutons, en effet, permettaient d'obtenir aisément des flux de neutrons importants par simple bombardement d'une cible par un faisceau d'ions.

C'est donc aux USA que les premiers développements de cyclotrons ont vu le jour.

Le Japon se lança presque aussitôt dans la construction de cyclotrons et un premier faisceau de deutons de 3 MeV était obtenu en 1937 à RIKEN (Tokyo). Une aide appréciable fut apportée par Lawrence à ce laboratoire sous la forme de la fourniture d'une réplique de l'aimant "Crocker". Mais, en 1945, à l'issue de la deuxième guerre mondiale, dans le contexte d'une méfiance, à vrai dire injustifiée, sur l'orientation des recherches en physique nucléaire, ce cyclotron fut jeté à la mer au large d'Osaka par la puissance occupante.

Au Collège de France, en 1936, Frédéric Joliot avait lancé la commande d'un aimant de cyclotron auprès de la société Oerlikon. L'aimant, livré un peu avant le début de la guerre en 1939, resta en sommeil et ne put être définitivement équipé du système radio-fréquence qu'en 1945, date à laquelle le premier faisceau fut obtenu. Ce cyclotron a produit par la suite des deutons de 6 MeV, et des ions Hélium 4 deux fois chargés de 12 MeV d'énergie totale.

De fait, dès les premiers essais, Lawrence et ses collaborateurs avaient pressenti les limites en énergie de ce genre d'accélérateur. Pour obtenir que les ions décrivent des trajectoires stables dans le sens vertical, il est indispensable que le champ magnétique décroisse légèrement en fonction du rayon (indice de champ légèrement positif). Le champ n'étant plus exactement isochrone de ce fait,

la synchronisation avec la tension accélératrice ne peut plus être assurée au delà d'une limite pratique estimée entre 5 et 10 MeV pour des protons. Cependant, un aimant de grande dimension (diamètre des pôles : 184 pouces, soit quatre mètres soixante) avait été déjà été commandé dans le but d'atteindre de plus hautes énergies. Le jour même où l'aimant fut livré, Lawrence se trouva dans le plus grand embarras pour en accepter l'utilisation. En effet, entre la commande de cet aimant et sa livraison, la théorie des cyclotrons avait progressé. Des calculs simples basés sur l'augmentation de la masse des ions en fonction de leur vitesse, conformément à la théorie de la Relativité, montraient que le maintien de l'isochronisme exigeait d'utiliser un indice de champ négatif, et non pas positif pour l'accélération des ions devant atteindre une haute énergie.

La nécessité d'un indice de champ positif, c'est-à-dire d'un champ décroissant en fonction du rayon, n'était pas discutable. Elle était indispensable pour maintenir la stabilité des ions dans le sens vertical. Une solution fut proposée, d'ailleurs la seule possible, qui consistait à moduler la fréquence accélératrice en synchronisme avec la diminution de la fréquence orbitale des ions, conséquence la décroissance radiale du champ. D'où un fonctionnement discontinu : un paquet d'ions quittant le centre devait avoir atteint le rayon de sortie du champ avant que ne soit injecté le paquet suivant. Le fonctionnement comporte donc des *cycles d'accélération*.

Mais, comme cela se produit parfois, la solution d'un problème en faisait surgir un autre : le principe de l'isochronisme étant abandonné, comment arriver à maintenir la cohésion longitudinale des particules d'un même paquet pendant les centaines de tours que devait comporter leur accélération ?

L'aimant du gros cyclotron restait sans possibilité d'emploi...

Fort heureusement, en 1945, Edwin Mac Millan et Vladimir Veksler découvrirent, d'ailleurs indépendamment l'un de l'autre, le principe de la stabilité de phase.

Le principe de stabilité de phase est relatif au confinement longitudinal des paquets d'ions sous l'effet d'un champ accélérateur. On sait que dans un champ non isochrone, en l'absence d'accélération, les ions d'un même paquet ont tendance à se dégroupier dans le sens longitudinal du fait de leur dispersion en énergie. Mais, en présence d'un champ accélérateur, on peut faire en sorte que les particules qui sont en avance, donc celles qui ont le plus d'énergie, reçoivent moins d'accélération que les particules qui sont en retard, c'est-à-dire les particules qui ont le moins d'énergie. Il en résulte que les particules d'un même paquet pourront rester groupées. Pour ce faire, des conditions doivent être remplies quant à l'amplitude de la tension accélératrice et à la phase du paquet d'ions.

On put donc enfin utiliser l'aimant de 184 pouces pour réaliser un accélérateur à haute énergie, qui ressemblait à un cyclotron, mais qui était caractérisé par un fonctionnement en mode pulsé. On donna le nom de synchro-cyclotron à ce type d'accélérateur permettant d'atteindre des énergies très élevées. Le synchro-cyclotron de 184 pouces a depuis atteint une énergie de 740 MeV en protons, mais avec une faible intensité moyenne, de l'ordre d'une fraction de microampère. Le mode pulsé ne favorise pas en effet la production de faisceaux intenses. Comme autre réalisation d'importance, citons le synchro-cyclotron de 600 MeV du CERN, mis en service en 1957, qui peut produire 5 microampères de protons. Un peu plus d'une dizaine de synchro-cyclotrons sont actuellement en fonctionnement, certains étant utilisés pour des applications médicales, comme par exemple le synchro-cyclotron de 200 MeV d'Orsay.

En 1952, la théorie des accélérateurs a connu un développement considérable avec la découverte du principe de la *focalisation forte*, qui est basé sur les propriétés des gradients alternés. En introduisant sur le parcours d'un faisceau de particules des gradients de champ magnétique élevés, mais de sens opposés, on peut maîtriser les effets de focalisation dans les deux directions transverses et de manière indépendante. Cette découverte fut publiée par Courant, Snyder et Livingston. On reconnut par la suite que Christofilos, un chercheur grec qui était retourné dans son pays, avait, de son côté, publié deux ans auparavant un mémoire à diffusion restreinte sur le même sujet.

Ces nouvelles perspectives redonnèrent une impulsion de portée considérable au développement des accélérateurs.

En ce qui concerne les cyclotrons, l'intérêt suscité par ces recherches et les efforts de documentation qui s'ensuivirent permirent de tirer de l'oubli une publication de L. H. Thomas, de l'Université de Ohio, datant de 1938, restée totalement ignorée, qui expliquait en détail les avantages qu'il y aurait à utiliser une modulation azimutale du champ magnétique pour améliorer les performances des cyclotrons.

Des cyclotrons vraiment isochrones, utilisant des faisceaux d'électrons pour permettre, à peu de frais, d'atteindre des vitesses de particule élevées, furent aussitôt construits aux USA. Leur succès immédiat permit de valider le principe de variation azimutale du champ pour assurer le fonctionnement isochrone des cyclotrons.

Les années 60 voient la mise en service de nombreux cyclotrons isochrones de dimensions modérées dans divers pays. Les deux grands cyclotrons à protons du laboratoire "Paul Scherrer Institute" (nom actuel, en abrégé PSI) en Suisse et de TRIUMF à Vancouver (Canada) sont en service depuis 1975.

Des cyclotrons, d'une nouvelle génération, dont le champ magnétique élevé est obtenu par l'emploi de bobines principales supraconductrices, ont été construits et mis en service à Michigan State University (1981) et à Chalk River (Canada). Le cyclotron AGOR, du laboratoire de GRONINGEN, a été construit à ORSAY en coopération avec ce laboratoire. Le premier faisceau a été accéléré en avril 1994. Le cyclotron de CATANE, lui aussi construit avec des bobines supraconductrices, est un autre exemple.

Des cyclotrons à secteurs séparés pour l'accélération d'ions lourds ont été mis en service dans les années 80. Pour ne citer que les plus importants : GANIL en France, HIRFL à Lanzhou (Chine), et le cyclotron du laboratoire RIKEN à Tokyo. A Osaka, un gros cyclotron à secteurs séparés et à énergie variable en ions légers et lourds est entré en service. Ce cyclotron est destiné à être utilisé comme injecteur d'un anneau de stockage.

Enfin, à Caen, un cyclotron classique, dénommé SPIRAL, destiné à l'accélération d'ions radioactifs produits à partir du faisceau de GANIL, fonctionne depuis 1998.

Nous arrêtons là l'énumération des réalisations de cyclotrons. Les installations actuelles, au nombre d'une centaine, sont régulièrement cataloguées lors des conférences internationales sur les cyclotrons. De par leur nature, caractérisée par des surfaces polaires importantes, les cyclotrons sont voués à la production de faisceaux de moyenne énergie. Plusieurs projets basés sur une extrapolation des performances actuelles sont restés au stade des études, car ils laissaient entrevoir de très sérieux problèmes de réalisation.

Les *synchrotrons* surpassent, et de beaucoup, les autres types d'accélérateurs dans le domaine des énergies élevées. Ces machines circulaires, apparues après les cyclotrons, sont constituées d'un grand nombre d'électroaimants de dimensions modérées, et fonctionnent de manière pulsée : l'énergie finale est obtenue après une montée progressive du champ magnétique, accompagnée d'une augmentation adéquate de la fréquence accélératrice.

Citons le SPS du Cern, de 300 GeV, dont le diamètre est de deux kilomètres. Cet accélérateur sophistiqué, après des années d'utilisation pour la recherche, assume maintenant le rôle d'injecteur pour le LHC nouvellement mis en service.

De nouvelles structures circulaires sont apparues dans les années 70 : les *anneaux de stockage*. Des faisceaux d'ions ou d'électrons, selon le cas, peuvent être maintenus sur une même orbite, moyennant certaines précautions à prendre contre les pertes dues au rayonnement et aux interactions avec les gaz résiduels car la durée de vie des particules doit se chiffrer en heures pour être intéressante. Des intensités apparentes très importantes, plusieurs centaines de milliampères, peuvent être obtenues par l'injection répétée de particules produites par un autre synchrotron ou par un accélérateur linéaire.

L'émission de *lumière synchrotron* est une des finalités des anneaux de stockage de faisceau d'électrons ou mieux encore de positons. De telles installations existent dans de nombreux pays. Citons, pour la France, les laboratoires de SOLEIL à Orsay et de l'ESRF à Grenoble.

Les *anneaux de collision* sont un cas particulier d'agencement de deux anneaux de stockage dans lesquels les particules tournent en sens inverse, de manière à provoquer des collisions aux points d'intersection. Les paquets de particules sont injectés, accélérés, puis stockés sur des trajectoires appropriées pour que toutes ces fonctions puissent cohabiter.

Une bonne luminosité est le principal facteur de qualité des anneaux de stockage.

Le LHC (Large Hadron Collider) du CERN est le plus grand anneau de collision construit à ce jour. Cet anneau de 26 kilomètres de circonférence a été installé à la place du LEP, qui était un anneau de collision d'électrons et de positrons.

Les hadrons désignent principalement les noyaux, qui sont des particules beaucoup plus lourdes que les électrons ou les positrons. Les collisions, produites avec des densités d'énergie considérables (1150 TeV pour des noyaux de Plomb), permettront une avancée dans notre connaissance de la constitution des noyaux et des particules dites élémentaires qui le composent.

Cependant, la construction d'accélérateurs de plus en plus puissants constitue une charge financière de plus en plus lourde. Le projet de collisionneur de 87 kilomètres de circonférence, le SSC, dont la réalisation avait débuté au Texas il y a une vingtaine d'années, a été abandonné pour des raisons budgétaires. Le Comité International pour les Futurs Accélérateurs (ICFA) a commenté ainsi cette décision : "...L'abandon du supercollisionneur supraconducteur (SSC), le plus grand projet de collisionneur à haute énergie jamais entrepris, constitue une grande perte pour la communauté internationale des physiciens des hautes énergies. Cet aboutissement illustre la nécessité d'élaborer une stratégie mondiale pour la construction de nouvelles installations..."

On doit les progrès spectaculaires des accélérateurs au développement, mené de pair, des connaissances théoriques et de la technologie. Les aimants à bobines supraconductrices, les résonateurs haute fréquence cryogéniques sont passés, dans les deux dernières décades, de l'état de prototypes à celui d'équipements fiables convenant à une production industrielle.

Comme on le voit, moins d'un siècle après l'avènement des accélérateurs de particules, des sommets ont été atteints assez vite, les défis technologiques et les implications financières mettant un frein à une progression des accélérateurs vers des énergies toujours plus grandes. Néanmoins, dans l'attente d'une percée théorique dans les principes actuels d'accélération, qui permettrait de réduire les dimensions des machines et d'ouvrir ainsi la voie à la construction d'accélérateurs plus puissants d'un prix abordable, la qualité des faisceaux produits ne cesse de s'améliorer.

En ce qui concerne les cyclotrons, accélérateurs de performances modestes mais de coût abordable, leur domaine reste celui des énergies dites moyennes, parfaitement adaptées aux recherches en Physique nucléaire, en Physique de la matière condensée, en Astrophysique, et en Médecine nucléaire.



2. Théorie du cyclotron isochrone.

2.1. Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme.

Pour nous conformer à l'usage, nous emploierons souvent l'expression "champ magnétique" à la place de l'expression appropriée "induction magnétique". Que le lecteur veuille bien se rappeler que les particules chargées en mouvement sont sensibles à l'induction magnétique, et que ces deux grandeurs physiques sont reliées par la relation :

$$\vec{B} = \mu * \vec{H}$$

\vec{B} est le vecteur induction magnétique,

\vec{H} est le vecteur champ magnétique,

μ est la perméabilité magnétique locale du milieu. Les particules étant censées se déplacer sous vide, " μ " est le même partout et sa valeur " μ_0 " est alors :

$$\mu_0 = 4 * \pi * 10^{-7} \quad (\text{Henry par mètre})$$

Dans ce qui suit, nous supposons que nous disposons d'un champ magnétique uniforme, nous nous placerons dans un plan normal à ce champ, que nous conviendrons d'appeler *plan médian*. Nous négligerons l'influence du champ de gravité terrestre, eu égard à l'extrême brièveté des phénomènes.

Une particule chargée de masse " m ", de charge " q ", animée d'une vitesse de module " v " dans le plan médian est soumise à une force " \vec{F} " normale au vecteur vitesse et au vecteur induction magnétique. Le module " f " de cette force, dite de Lorentz, a pour valeur :

$$f = q * v * b$$

" b " étant le module du vecteur induction magnétique.

(La formule de Lorentz est la transposition, pour une particule chargée en mouvement, de la formule de Laplace relative à la force exercée par l'induction magnétique sur un conducteur parcouru par un courant).

Notons que si la charge " q " est positive, le trièdre *vecteur vitesse, vecteur induction magnétique, vecteur force* est un trièdre direct.

La masse de la particule étant supposée constante on peut écrire :

$$v \text{ point} = (q / m) * v * b$$

formule dans laquelle " $v \text{ point}$ " désigne le module du vecteur accélération.

La force " \vec{F} " étant normale au vecteur vitesse et son module étant constant, le mouvement de la particule répond précisément à la définition du mouvement circulaire uniforme. Donc on a aussi :

$$v \text{ point} = (v * v) / r = \text{constante}$$

r : rayon du cercle.

Des relations précédentes on tire :

$$v / r = q * b / m = \text{constante}$$

ou encore en tenant compte des conventions de signe :

$$\omega = - q * b / m \quad (1)$$

ω désignant la vitesse angulaire de la particule. Pour une particule chargée positivement, le vecteur rotation est de sens opposé au vecteur induction magnétique.

2.2. Isochronisme.

Aux très basses énergies la masse " m " d'une particule est pratiquement indépendante de sa vitesse. Des particules de même masse, mais de vitesses différentes, tournent donc avec la même vitesse angulaire " ω ". On dit qu'elles sont isochrones. Si l'on s'arrange pour que les trajectoires de ces particules soient centrées sur le même point et si l'on dispose ces particules de manière à les aligner le long d'un même rayon à l'instant initial, il devient alors possible, à chaque révolution, de leur faire franchir au même instant un espace accélérateur commun, disposé radialement. De cette manière on pourra augmenter progressivement l'énergie de l'ensemble des particules, à l'aide d'un système accélérateur unique et de champs accélérateurs modérés. La condition à respecter est que le champ accélérateur soit un champ alternatif synchrone. C'est là le principe du cyclotron isochrone établi par Lawrence.

Les trajectoires accélérées ne sont plus des cercles, mais prennent la forme de spirales, car tout gain en énergie entraîne un gain en vitesse et donc un accroissement du rayon. Des particules à très basse énergie, provenant d'une source d'ions, sont introduites dans la région voisine du centre et sont extraites lorsqu'elles ont atteint le rayon maximal de la zone couverte par le champ magnétique. Le système accélérateur comporte un générateur dont la fréquence est égale à la fréquence de révolution des particules ou bien à un multiple de cette fréquence. Le nombre entier représentant le rapport de la fréquence du système accélérateur à la fréquence de rotation des particules s'appelle *rang d'harmonique HF*, ou plus simplement *harmonique HF*. Le sigle HF, désigne ce que l'on appelle la Haute Fréquence, allant de quelques mégahertz à quelques dizaines de mégahertz.

Dans les cyclotrons modernes les particules effectuent des centaines de tours avant d'atteindre l'énergie finale. La synchronisation du mouvement des particules avec la tension accélératrice doit donc être parfaitement respectée, aucune dérive importante n'est souhaitable. L'isochronisme du champ doit être réalisé avec soin.

On se rappellera que les premiers cyclotrons étaient limités à des énergies d'une dizaine de MeV environ, par défaut de synchronisation. Leur champ magnétique étant de révolution, le maintien de la focalisation axiale (qui concerne les particules situées hors du plan médian), exigeait l'utilisation d'un champ magnétique dont la grandeur décroissait légèrement en fonction du rayon. Les particules, qui de ce fait prenaient progressivement du retard par rapport au champ

accélérateur, ne pouvaient plus être accélérées au delà d'une centaine de tours. Depuis la mise en pratique de la modulation azimutale du champ (voir paragraphe 2.8), qui permet de rétablir la stabilité axiale sans déroger au principe de l'isochronisme, le fonctionnement des cyclotrons est devenu parfaitement isochrone.

Cependant, dans la conception des cyclotrons à haute énergie, il est indispensable de prendre en compte l'augmentation progressive de la masse "m" des ions si l'on veut maintenir le principe d'une accélération isochrone.

Le but recherché est de maintenir " ω " constant. Pour y parvenir, il faut maintenir constant le rapport " b / m " indiqué dans la formule (1).

On sait que la masse varie comme le facteur relativiste " γ " :

$$\gamma = 1 / \sqrt{1 - \beta^2} \quad \text{avec } \beta = v / c \quad c : \text{vitesse de la lumière,}$$

"sqrt" désignant la racine carrée.

La loi radiale de champ doit donc être :

$$b = b_0 * \gamma \quad b_0 : \text{valeur du champ au centre, c'est-à-dire pour } \gamma = 1.$$

Le champ magnétique n'est plus alors un champ uniforme, cependant il reste normal au plan médian en tout point de ce plan.

2.3.Accélération.

Pour respecter une certaine progressivité dans l'exposé, nous considérerons provisoirement (paragraphe 2.3 à 2.5 inclus) que nous avons affaire à l'accélération d'une seule particule. Dans la réalité, ce sont des paquets de particules qui sont accélérés, à la cadence d'un paquet par période HF.

Dans le modèle simple décrit dans le paragraphe précédent, l'accélération est obtenue par un champ électrique, sensiblement parallèle à la vitesse, produit par des électrodes rectilignes disposées radialement.

Signalons que l'utilisation d'électrodes spiralées, ou encore d'électrodes rectilignes non alignées avec le centre reste possible. Nous remarquerons que l'angle dont tourne la particule entre deux passages successifs à travers la même électrode devient alors différent de $2 * \pi$. On pourrait craindre un défaut de synchronisation avec le champ accélérateur alternatif. Il n'en est rien. On démontre⁴ que la synchronisation est automatiquement rétablie, grâce à l'effet du petit écart angulaire créé par la composante radiale du champ accélérateur. Ceci n'est vrai qu'au premier ordre et sous condition que le facteur relativiste reste voisin de l'unité. Quoiqu'il en soit, les petits défauts de synchronisme qui pourraient se manifester peuvent être corrigés par une action sur la loi de champ magnétique radiale.

Pour maintenir le centrage de la trajectoire, il est recommandé que le système accélérateur comporte au moins deux électrodes opposées. Si les espaces accélérateurs sont plus nombreux, leur disposition devra, si possible, présenter une symétrie de rotation autour du centre. Si cette

symétrie n'est pas respectée, à dessein ou par suite d'une avarie, le centrage de la trajectoire pourra néanmoins être corrigé en dissymétrisant de manière appropriée le champ magnétique.

Le champ accélérateur est une fonction sinusoïdale du temps. Car on ne sait pas produire, ce qui serait pourtant l'idéal, une loi de tension présentant une amplitude constante pendant l'instant de franchissement d'un espace accélérateur. Si l'on utilise un système accélérateur *monogap*, on cherchera donc à faire passer la particule dans chaque intervalle accélérateur au moment où le champ électrique est maximal.

Dans la plupart des cyclotrons, on utilise des électrodes accélératrices doubles appelées *dees*. Les champs électriques des deux électrodes d'un même *dee* sont de même amplitude mais de sens opposés à un instant donné. L'accélération maximale correspond à un réglage de la phase de la fréquence synchrone tel que l'amplitude du champ accélérateur passe par zéro lorsque la particule franchit la médiatrice de l'angle formé par les deux électrodes d'un même *dee*. Tout autre réglage est incorrect, car dans la pratique on accélère des paquets de particules, et non pas une seule particule. Il convient alors que la particule centrale du paquet franchisse la médiatrice de chaque *dee* comme indiqué ci-dessus. Sinon, la particule centrale ne pourra pas bénéficier d'un gain d'énergie maximal, et, surtout, les particules d'un même paquet ne pourront pas acquérir le même gain en énergie.

Pour la particule centrale, le gain d'énergie par tour est en général constant, du fait de l'équirépartition des potentiels le long des électrodes accélératrices. Cependant cette loi n'est pas toujours rigoureusement respectée dans la pratique, du fait des caractéristiques radioélectriques des électrodes.

Il est important de noter que les orbites successives se resserrent au fur et à mesure que l'on s'éloigne du centre. L'intervalle radial entre deux orbites successives est approximativement inversement proportionnel à la distance de ces orbites au centre (voir formulaire).

2.4. Variation d'énergie, expression de l'énergie maximale.

La faculté de pouvoir disposer d'un faisceau dont on peut régler l'énergie est très intéressante pour les utilisateurs d'un cyclotron. De même, la possibilité de pouvoir accélérer des ions différents, en utilisant le même cyclotron, est très appréciée.

La plupart des cyclotrons modernes possèdent ces deux aptitudes. L'usage veut que l'appellation de cyclotron à *énergie variable* s'étende aux cyclotrons capables d'accélérer plusieurs types d'ions.

Examinons pour commencer les conditions requises pour qu'un cyclotron puisse produire un faisceau dont l'énergie soit réglable.

L'énergie cinétique d'une particule donnée est fonction de sa vitesse, et par voie de conséquence des deux paramètres suivants : la vitesse angulaire " ω ", et le rayon " r " de l'orbite correspondante.

Pour faire fonctionner un cyclotron à énergie variable il faut donc que l'on soit en mesure de

pouvoir modifier l'un de ces deux paramètres.

La méthode de loin la plus répandue consiste à faire varier la vitesse angulaire ω de la particule, et de ne pas toucher à la valeur du rayon d'extraction. Un changement d'énergie dans ces conditions est une opération relativement longue, qui engage la reprise d'un certain nombre de réglages, comme indiqué ci-après.

- le niveau global " b_0 " du champ magnétique doit être ajusté, à l'aide des bobines principales qui ceinturent les pôles,
- le profil radial du champ doit être adapté à la nouvelle valeur du facteur relativiste " γ ", à l'aide des bobines de correction réparties sur les surfaces polaires,
- la fréquence du système accélérateur, éventuellement le rang d'harmonique HF, doivent être réglés sur les nouvelles valeurs,
- si l'on sort des domaines de réglage du cyclotron, il peut devenir nécessaire de changer l'état de charge de l'ion utilisé.

L'autre méthode de variation d'énergie consiste à faire varier le rayon d'extraction des particules, sans modifier les paramètres de réglage du cyclotron. Une seule opération est nécessaire, le déplacement radial du système d'extraction.

Un exemple d'extraction à énergie variable de ce type est donné par le cyclotron TRIUMF à Vancouver. Le système d'extraction est ici constitué d'une simple feuille d'épluchage, que l'on peut déplacer radialement dans le but de changer l'énergie du faisceau extrait. Les ions H^- devenant des ions H^+ (protons), ces derniers sortent alors du champ magnétique du fait de l'inversion de la courbure de la trajectoire.

Dans le cas général, où l'on a affaire à un système d'éjection classique, le déplacement de grande amplitude des septum d'extraction n'apparaît pas mécaniquement simple, et de plus il n'est possible de modifier leur rayon de courbure. Cette procédure est pratiquement irréalisable sur les cyclotrons compacts. Elle est difficilement concevable pour les cyclotrons à secteurs séparés. Cependant une étude récente a montré que le cyclotron à secteurs séparés SARA pourrait être équipé d'un tel dispositif.

Par souci de simplicité, les cyclotrons à très haute énergie fonctionnent à champ et fréquence fixes et avec le même type de particule : des protons. La variation radiale du facteur relativiste " γ " est très importante. Rappelons-nous que le champ magnétique moyen doit varier radialement dans la même proportion. La conception de cyclotrons à très haute énergie (au dessus de 0.6 GeV par nucléon) exclut, pour des raisons d'ordre pratique et aussi théorique, l'option du fonctionnement à énergie variable (champ et fréquence variables).

En effet le fonctionnement à énergie variable implique que la valeur finale de " γ " puisse varier dans une large gamme. Le concepteur se trouve alors confronté à de très sérieuses difficultés technologiques de réalisation des bobines de correction du champ magnétique.

De plus, les changements importants du gradient radial de champ entraînent aussi des changements considérables des nombres d'onde (paragraphe 2.7). En conséquence, des

résonances nuisibles peuvent se manifester et conduire à restreindre le domaine d'application du fonctionnement à énergie variable. Signalons cependant le cas du nouveau cyclotron à secteurs séparés et à énergie variable d'Osaka, conçu pour accélérer des ions légers, l'énergie en protons pouvant atteindre 400 MeV.

Les cyclotrons à énergie variable classiques fonctionnent pour la plupart avec des particules de masses et d'états de charge différents. Ce sont des cyclotrons de faible ou moyenne énergie, pour lesquels le facteur " γ " varie dans de faibles proportions. L'énergie maximale qui peut être atteinte au rayon maximal peut s'exprimer par la formule suivante, non relativiste, donc peu précise, mais d'un emploi très pratique :

$$\text{Energie cinétique totale du noyau} = K * Q^2 / A \quad (2)$$

formule dans laquelle :

l'énergie cinétique est généralement exprimée en MeV,

"A" est en principe la masse atomique du corps considéré (à ne pas confondre avec la masse de l'ion), cependant on ne fera pas d'erreur bien grande en utilisant comme valeur de "A" l'entier représentant le nombre de nucléons du noyau,

"Q" est le **nombre** de charges (à ne pas confondre avec le numéro atomique "Z"),

et le coefficient "K" est une constante qui caractérise les performances maximales en énergie du cyclotron concerné.

Pour information, le calcul de "K" se fait à partir de l'expression non relativiste de l'énergie cinétique, soit :

$$\text{Energie cinétique} = (m * v^2) / 2$$

dans laquelle "v" représente la vitesse d'une particule de masse "m" (et de charge "q"). Le calcul montre que le coefficient "K" est proportionnel au carré de l'induction magnétique maximale et au carré du rayon d'extraction. La formule (2) n'est valable que dans la mesure où la gamme de fréquence du système accélérateur est suffisamment étendue vers le haut pour ne pas imposer par elle-même de plafond d'énergie, ce qui est généralement le cas.

La formule (2) est approchée, et de plus la masse des électrons manquants est négligée. Dans ces conditions, on est en droit de prendre pour valeur de "A" le nombre (entier) de nucléons du noyau considéré, ce qui est plus simple.

En divisant le second membre de la formule (2) par "A", supposé représenter le nombre de nucléons, on obtient la formule suivante :

$$E_c = K * Q^2 / A^2$$

dans laquelle E_c désigne l'énergie cinétique maximale exprimée en MeV par nucléon .

La formule étant approchée, il n'y a pas lieu d'épiloguer sur la distinction que l'on pourrait faire entre l'énergie exprimée en MeV par nucléon et l'énergie exprimée en MeV par unité de masse atomique .

Si l'on recherche la valeur exacte de l'énergie cinétique, on fera appel à la formule rigoureuse

et générale :

$$E_c = E_0 * (\gamma - 1) \quad (3)$$

Dans laquelle " E_c " désigne l'énergie cinétique d'un corps en mouvement dont l'énergie totale au repos, " E_0 ", est reliée à sa masse au repos " m_0 " par la relation $E_0 = m_0 * c^2$.

Dans un cyclotron isochrone, " γ " peut s'exprimer comme suit, en fonction du rayon moyen " r ", de la vitesse angulaire moyenne " ω " de la particule, et de la vitesse " c " de la lumière :

$$\gamma = 1 / \sqrt{1 - \beta^2} \quad \text{avec} \quad \beta = \omega * r / c$$

Rappelons en passant que la vitesse angulaire " ω ", définie par la formule (1), est reliée à la fréquence de rotation de la particule " F_p " par la formule générale :

$$\omega = 2 * \pi * F_p$$

Une certaine confusion peut apparaître dans l'interprétation de la formule (3).

Si " E_0 " désigne effectivement l'énergie totale au repos du noyau de l'ion considéré, " E_c " désignera l'énergie cinétique totale de ce noyau, exprimée, comme E_0 , en électron-volt ou en multiple de cette unité.

L'énergie cinétique totale du noyau, exprimée en prenant comme unité l'électron-volt (ou encore un multiple de cette unité), divisée par le nombre " A " de nucléons, est appelée *énergie cinétique par nucléon*.

Dans les calculs de trajectoires exigeant une grande précision absolue, on veillera à prendre en compte la masse des électrons rattachés à l'ion accéléré.

Rappelons que l'énergie totale au repos correspondant à l'unité de masse atomique est d'environ 0.931 GeV, et celle de l'électron de 0.000511 GeV.

2.5. Orbites d'équilibre.

Dans un accélérateur circulaire on appelle *orbite d'équilibre* toute trajectoire de particule se refermant sur elle-même, en l'absence d'accélération. Il s'agit bien entendu de particules circulant autour du centre de l'accélérateur.

Sauf cas particuliers (une certaine catégorie de résonances), il n'existe qu'une seule orbite d'équilibre passant par un point donné.

Dans un cyclotron isochrone, par définition, la durée de révolution est la même pour toute orbite d'équilibre située dans la zone utilisée pour l'accélération.

2.6. Groupe de particules.

Jusqu'à présent nous avons considéré le cas d'une particule isolée, correctement placée sur orbite, et se mouvant dans le plan médian. Dans la réalité, on a toujours affaire à un groupe de particules entourant la position de cette particule théorique, que nous appellerons désormais particule centrale du groupe d'ions, ou encore *particule de référence*. Notons que la notion de particule de référence est un concept, et que par conséquent la particule de référence peut très bien

ne pas exister physiquement.

Les particules d'un même groupe diffèrent les unes des autres par leur position et leur vitesse. On peut définir toute particule par rapport à la particule de référence, à *un instant donné*, par les trois composantes du vecteur définissant sa *position relative* et par les trois composantes du vecteur définissant sa *vitesse relative*. Soit au total six paramètres.

Pour l'instant, nous ne ferons aucune hypothèse sur la loi de répartition de ces particules.

Dans certaines applications, on utilise la *différence des quantités de mouvement absolues*, au lieu de la vitesse relative.

Nous reviendrons sur ce sujet au paragraphe 2.12.

2.7. Comportement d'un groupe de particules non accélérées **dans le plan médian.**

On pourra se reporter à l'annexe 3 pour plus de détail, si on le désire. Toutefois, pour la progressivité de l'exposé, la présentation n'est pas faite dans le même ordre.

On supposera dans ce qui suit que **le champ magnétique est de révolution** (et qu'il n'est pas isochrone pour les paragraphes 2.7.1 à 2.7.3 inclus). Nous faisons abstraction pour l'instant de ce qui se passe pour des particules qui seraient situées en dehors du plan médian.

Plaçons-nous **dans les repères mobiles de Frenet** (se reporter à l'annexe 1) relatifs à une particule de référence décrivant une orbite d'équilibre donnée, donc de forme circulaire, à la vitesse angulaire constante " ω ".

Intéressons-nous au comportement d'une particule voisine de la particule de référence.

La résolution des équations du **mouvement relatif au premier ordre** (annexe 3) conduit aux résultats suivants.

2.7.1. Si cette particule voisine possède la même énergie que la particule de référence, elle décrit une ellipse centrée sur un point fixe situé quelque part sur l'axe longitudinal du système de coordonnées relatives de Frenet. Le calcul montre aussi que la périodicité du mouvement relatif de la particule voisine n'est pas égale à la périodicité de révolution de la particule de référence le long de l'orbite d'équilibre. Le rapport de ces deux périodicités s'appelle le *nombre d'onde du mouvement bétatron radial* ou, en abrégé, **nombre d'onde radial**. Le nombre d'onde correspondant à une orbite d'équilibre donnée ne dépend que des caractéristiques du champ magnétique le long de cette orbite : valeur du champ et de son gradient transverse.

[Notons en passant que l'adjectif *radial* est relatif au plan médian (et aussi à tout plan parallèle). Dans le plan médian, le mouvement des particules peut se décomposer en un mouvement transversal, qualifié improprement de mouvement radial, et en un mouvement longitudinal.]

2.7.2. De ce qui précède il ressort qu'un groupe de particules *monochromatiques* voisines de la particule de référence constitue un ensemble qui reste indéfiniment confiné transversalement et longitudinalement.

Autre conséquence : si la trajectoire de la particule centrale d'un groupe de particules monochromatiques très rapprochées les unes des autres n'est pas confondue avec l'orbite

d'équilibre commune, cette particule centrale oscillera autour de l'orbite d'équilibre commune, et en conséquence on observera un mouvement d'ensemble du groupe de particules autour de l'orbite d'équilibre. On dit alors que ce groupe de particules est animé d'un mouvement de **précession**.

2.7.3. Si la particule voisine de la particule de référence se trouve avoir une énergie un peu différente de celle-ci, ce qui est physiquement le cas le plus répandu, son mouvement relatif reste analogue à celui décrit en 2.7.1. mais avec les différences suivantes :

- le centre de l'ellipse représentant le mouvement relatif de cette particule voisine se trouve situé sur l'orbite d'équilibre correspondante, donc sur une orbite différente de celle de la particule de référence,

- le centre de l'ellipse est animé d'un mouvement relatif longitudinal à vitesse constante. Pour information, le module de cette vitesse *relative* est proportionnel à la différence entre les modules des vitesses absolues de la particule voisine et de la particule de référence, et le coefficient de proportionnalité est fonction de l'indice de champ et du facteur relativiste.

Par conséquent, si l'on considère des particules groupées à un instant donné autour de leur particule de référence, mais ayant entre elles de petites différences d'énergie, ces particules vont se dégroupier au cours du temps jusqu'à prendre l'apparence d'un **anneau de particules**.

2.7.4. Enfin, si le champ est isochrone :

- le calcul montre que le phénomène de dégroupement longitudinal disparaît. Un groupe de particules voisines, d'énergies différentes, reste toujours confiné transversalement et longitudinalement.

- le nombre d'onde radial "nu r" est dans ce cas :

$$\nu r = \gamma$$

On verra que cette valeur du nombre d'onde radial reste à peu près la même pour un champ isochrone qui n'est pas de révolution, ce qui est le cas général des cyclotrons.

De ce qui précède **on retiendra** que, globalement, les trajectoires d'un groupe d'ions restent confinées transversalement entre deux rayons voisins séparés par une distance qui est fonction d'une part de la valeur maximale de l'amplitude des oscillations dites *bétatron* et de la valeur maximale de l'écart en énergie de certaines des particules du groupe, et d'autre part de l'amplitude de la précession de la particule de référence. Longitudinalement, les particules restent également groupées autour de la particule de référence, en toutes circonstances si ces particules sont à la même énergie, et à la condition que le champ soit isochrone si des écarts en énergie existent entre les particules du groupe.

2.8. Stabilité autour du plan médian.

Nous nous plaçons pour commencer dans l'hypothèse d'un champ de révolution isochrone.

Comme nous l'avons vu, le champ isochrone est une fonction croissante du rayon. Il s'ensuit que le champ auquel est soumise une particule située en dehors du plan médian n'est pas

exactement normal à ce plan (figure 5). La composante de champ **axiale** (c'est-à-dire normale au plan médian) reste la même **au premier ordre** que pour la particule correspondante située dans le plan médian. Par conséquent, au premier ordre, le mouvement radial d'une particule située hors plan médian, projeté sur le plan médian, se confond avec celui de la particule correspondante située dans le plan médian. Cependant, le champ n'étant pas uniforme, les lignes de force sont courbées, de telle sorte qu'une particule située hors plan médian est soumise à une petite composante radiale du champ dont la grandeur est proportionnelle, au premier ordre, à la distance qui sépare cette particule du plan médian.

Cette composante radiale engendre une force qui est proportionnelle à la distance au plan médian, perpendiculaire à ce plan, et qui a tendance à écarter la particule du plan médian. Dès 1938, Bethe et Bose avaient d'ailleurs conclu que cet effet de défocalisation axiale, sensible dès que les corrections de champ à appliquer pour tenir compte de l'effet relativiste prennent de l'importance, interdisait l'accès aux énergies supérieures à une dizaine de MeV.

Un champ isochrone de révolution ne permet donc pas le maintien sur orbite de particules situées en dehors du plan médian. Autant dire qu'il n'est pas utilisable pour l'accélération d'un faisceau de particules. On remarquera que les premiers cyclotrons utilisaient cependant des champs magnétiques de révolution, mais qui n'étaient pas tout-à-fait isochrones. La stabilité axiale était obtenue par une loi de champ légèrement décroissante en fonction du rayon. La limite en énergie de ces cyclotrons, de performances modestes, provenait du déphasage progressif des paquets d'ions qui finissaient par ne plus pouvoir être accélérés.

Les propriétés d'une variation azimutale du champ magnétique, redécouvertes dans les années 50 (L. H. Thomas¹⁷ avait en octobre 1938 publié une étude originale sur ce sujet, en réponse aux déclarations de Bethe et Bose, mais ce document était resté inaperçu, avec pour conséquence la mise en sommeil du projet de cyclotron de 184 pouces), ont permis d'obvier le défaut de stabilité axiale des champs isochrones. Les premiers cyclotrons qui ont été construits selon ce principe, ont porté le nom de *cyclotrons à variation azimutale de champ* (A.V.F. cyclotrons). Par la suite on a aussi utilisé l'appellation de *cyclotrons à focalisation par secteurs* (S.F.C. cyclotrons) pour désigner les cyclotrons isochrones.

Tous les cyclotrons modernes dont l'énergie dépasse quelques MeV sont des cyclotrons isochrones comportant un certain nombre de *collines* et de *vallées*. Les collines sont les zones azimutales de champ fort, les vallées les zones intercalaires de champ plus faible ou même nul. Dans ce dernier cas les collines portent plutôt le nom de "secteurs". Pour simplifier nous confondrons les termes de colline et de secteur.

La forme des collines (ou des secteurs), ainsi que l'importance de la modulation azimutale du champ interviennent directement dans les caractéristiques de la stabilité axiale. Une forme spiralée accroît la focalisation axiale sans modifier considérablement les caractéristiques du mouvement relatif dans le plan médian.

2.9. Conséquences d'une loi de champ à variation azimutale.

Les orbites d'équilibre ne sont plus des cercles, mais des courbes régulières dont les sommets sont situés sur la ligne médiatrice des secteurs. Il s'ensuit que les trajectoires des particules franchissent les bords d'un secteur sous un angle d'incidence différent de la normale. On démontre que le passage dans ces deux zones de champ de fuite crée globalement une force de rappel dirigée vers le plan médian et proportionnelle à la distance des particules à ce plan. Si cette force l'emporte sur la force de défocalisation axiale provenant de la croissance radiale du champ isochrone, la stabilité axiale est acquise. Comme nous l'avons dit, la force de rappel est d'autant plus grande que l'angle d'incidence est écarté de la normale. Par conséquent la contribution à l'effet de focalisation axiale apportée par la modulation azimutale est une fonction croissante du rapport des champs entre secteur et vallée et du rapport des largeurs entre vallée et secteur. Cette modulation azimutale porte le nom de *flutter* et il lui correspond une définition précise (Livingood², page 223, formule 13-4), ci dessous rappelée, dans laquelle "B" désigne la valeur de l'induction magnétique observée le long d'une orbite d'équilibre :

$$\text{Flutter "F"} = (\langle B^2 \rangle - \langle B \rangle^2) / \langle B \rangle^2$$

Les crochets indiquent qu'il s'agit de valeurs moyennes.

En outre, la focalisation axiale se trouve augmentée, pour une même condition de flutter, si les secteurs sont spiralés.

Dans le plan radial, la modulation azimutale du champ n'introduit pas de modification importante de la valeur du nombre d'onde radial, qui se maintient légèrement supérieure à " γ ". Par contre la structure du champ magnétique sous forme de *mailles* se suivant régulièrement a des conséquences très importantes. **Par maille on entend une portion élémentaire du champ magnétique couvrant, dans leur totalité, une vallée et un secteur**, l'azimut choisi pour le début de la maille n'ayant d'ailleurs pas d'importance du point de vue des calculs.

On démontre d'abord qu'il n'est pas possible d'obtenir un fonctionnement stable pour une configuration comportant deux secteurs et deux vallées.

D'autre part, l'énergie maximale théorique que l'on peut atteindre est bornée supérieurement. Au delà de cette borne, tout fonctionnement stable est rigoureusement impossible. La borne dépend du nombre de mailles. Si l'on commence l'accélération pour une valeur de " γ " voisine de l'unité, ce qui est d'ailleurs le cas général, voici quelques valeurs maximales théoriques :

pour trois secteurs : 465 MeV/uma soit " ν_r " et " γ " voisins de 1.5

pour quatre secteurs : 931 MeV/uma soit " ν_r " et " γ " voisins de 2

pour six secteurs : 1862 MeV/uma soit " ν_r " et " γ " voisins de 3

Dans la pratique on prend une marge très grande quant au nombre de secteurs nécessaires.

On pourra se référer à Livingood² (pages 239 à 241 pour les expressions des nombres d'onde et la citation de la borne supérieure sous le vocable contesté de " radial π mode stop band") et à Brück³ (pages 65 à 67 en particulier). A partir de l'analogie que l'on peut faire entre les

mailles d'un cyclotron et une succession de lentilles convergentes, on peut montrer, qualitativement, que l'augmentation de la convergence radiale d'une maille en fonction du rayon, conséquence inévitable de l'accroissement progressif du champ moyen (proportionnel à " γ "), mène à une configuration instable (dépassement de la borne supérieure). Se reporter à la figure 12.

2.10. Valeurs moyennes.

On définit le *rayon moyen* d'une orbite d'équilibre comme étant le rayon du cercle ayant le même périmètre que cette orbite d'équilibre, que le champ soit isochrone ou non. La valeur moyenne du champ le long de l'orbite d'équilibre s'appelle le *champ moyen*. Le produit du rayon moyen par le champ moyen est par définition égal à la rigidité magnétique " $B\rho$ " :

$$B\rho = (m * v) / q$$

dont la valeur caractérise l'orbite d'équilibre considérée.

L'utilisation des valeurs moyennes s'impose lorsque l'on veut traiter de manière simple les problèmes de trajectoires. On considère alors que les orbites sont des cercles.

2.11. Accélération d'un groupe de particules.

Nous allons maintenant étendre les informations du paragraphe 2.7 au cas plus général concernant l'accélération synchrone d'un groupe de particules. Nous supposons que les particules sont d'énergies légèrement différentes, ce qui est le cas habituel. Nous nous placerons dans la situation où le gain d'énergie par tour de la particule de référence est constant en fonction du rayon, ce qui est aussi le cas habituel.

Dans le cas d'un champ isochrone, les particules resteront groupées, le rayon de rotation de la particule de référence augmentera légèrement à chaque tour, en première approximation, d'une quantité inversement proportionnelle à ce rayon. La dimension transversale du paquet fluctuera légèrement et régulièrement autour d'une valeur constante en première approximation si l'adaptation (paragraphe 2.13) a été effectuée correctement. La dimension longitudinale du paquet augmentera proportionnellement au rayon. Mesurée en unités de phase HF, cette dimension longitudinale restera donc constante durant toute l'accélération.

Supposons maintenant que la particule de référence, par suite d'un réglage défectueux, traverse les espaces accélérateurs, toujours de manière synchrone, mais à une phase qui ne correspond pas au gain d'énergie maximal. Par suite de la variation du gain d'énergie pendant la durée de la traversée des espaces accélérateurs, chacune des particules d'un même paquet recevra un gain d'énergie différent. Ce qui veut dire que la dispersion en énergie globale des particules du paquet va augmenter. Si l'on se rappelle que chaque particule oscille autour de l'orbite d'équilibre correspondant à sa propre énergie, cette augmentation de la dispersion en énergie des particules du paquet aura pour conséquence une augmentation de la largeur radiale du paquet, et l'on pourra même observer en fin d'accélération un empiètement radial des paquets d'ions successifs. Cependant, si le champ est bien isochrone, la dimension longitudinale, mesurée en unités de phase

HF, restera constante durant toute l'accélération.

En résumé, sous la seule condition que le gain en énergie soit constant à chaque tour (paragraphe 2.20), la dimension longitudinale des paquets d'ions, exprimée en unités de phase HF, reste constante en cours d'accélération.

Cette propriété est caractéristique du fonctionnement isochrone.

Les accélérateurs cycliques autres que les cyclotrons isochrones ne bénéficient pas de cette propriété. La cohésion longitudinale des particules d'un même paquet est alors obtenue par l'action d'une accélération synchrone, d'amplitude choisie et calée de manière convenable sur une phase qui ne correspond pas au gain d'énergie maximal. Pour les particules, il s'agit d'une action relativement lente qui s'oppose à leur tendance naturelle à se disperser longitudinalement dans un champ qui n'est pas isochrone. On dit que le fonctionnement de ces accélérateurs est basé sur le principe de la *stabilité de phase*. Le décalage en phase doit prendre des valeurs opposées selon que l'indice de champ radial est inférieur ou supérieur à l'indice de champ isochrone.

2.12. Emittance.

Lorsqu'on veut caractériser un faisceau de particules en un point donné de sa trajectoire, point situé sur une ligne de transfert ou à l'intérieur de l'accélérateur lui-même, on fait appel à la notion d'*émittance du faisceau* en ce point.

Nous allons, dans ce paragraphe, définir précisément cette notion d'émittance, si importante au niveau de la conception et de la conduite des accélérateurs.

2.12.1. Généralités.

Les particules d'un faisceau sont, à l'origine, émises par une source d'ions sous la forme d'un flux macroscopiquement continu. Du fait des imperfections de la source, les particules ont des trajectoires et des énergies légèrement différentes. Pour pouvoir accélérer ces particules dans les meilleures conditions, il faut les grouper préalablement en une série de paquets aussi courts que possible, à raison d'un paquet par période HF en général. Il convient aussi de donner aux particules de chaque paquet une loi de répartition adéquate. Cette opération porte le nom d'*adaptation de l'émittance* du faisceau (voir paragraphe 2.13).

Par la suite, aussi bien en cours d'accélération que dans les lignes de transfert, le faisceau conservera de lui-même cette structure en paquets.

L'une des préoccupations majeures du concepteur, comme de l'utilisateur d'un accélérateur cyclique, est de pouvoir maîtriser l'évolution des caractéristiques des paquets d'ions tout au long de leur parcours.

Pour contrôler et optimiser les caractéristiques du faisceau, l'utilisateur d'une machine existante se base sur les connaissances acquises, et se sert des moyens de mesure et des commandes qui sont mis à sa disposition.

Pour le concepteur, le problème se pose en termes différents. Il dispose d'une certaine liberté

dans la définition des paramètres de la machine, mais, ne pouvant se livrer à l'expérience, il doit recourir à des calculs de simulation pour pouvoir accéder à la connaissance de l'émittance en tout point du système accélérateur.

C'est sous ce dernier aspect, celui de la simulation par le calcul, que sont présentés les développements qui suivent.

Le cadre de l'exposé fait l'objet d'un certain nombre de restrictions. Nous supposons que les particules sont placées dans des conditions telles qu'elles n'émettent pas de rayonnement. C'est le cas général des faisceaux d'ions accélérés par les cyclotrons. Nous ferons abstraction de la répulsion mutuelle des particules par les forces de Coulomb, qui est à l'origine des effets de charge d'espace. Et nous considérerons comme négligeables les interactions des charges en déplacement avec leur environnement matériel.

2.12.2. Coordonnées relatives d'une particule.

Observons la situation des particules d'un même paquet dans les repères mobiles de Frenet (Annexe 1) centrés sur la particule de référence. **A un instant donné**, chaque particule diffère de la particule de référence par sa position relative et sa vitesse relative.

Les projections du vecteur position relative et du vecteur vitesse relative constituent les coordonnées relatives de cette particule dans l'espace réel. Les trois axes de projection sont, rappelons-le : l'axe longitudinal (porté par le vecteur vitesse), l'axe transversal radial (contenu dans le plan médian), et l'axe transversal axial, perpendiculaire aux deux premiers, donc perpendiculaire au plan médian.

A un instant donné, les six coordonnées relatives peuvent être exprimées, **au premier ordre**, sous des formes équivalentes, parfois d'un emploi plus commode :

- la position longitudinale peut être s'exprimer en unités de "phase HF". Pour cela, la valeur de l'écart longitudinal est divisée par le module de la vitesse de la particule de référence (ce qui est correct au premier ordre). Cela donne un écart en temps, par convention négatif si la particule considérée précède la particule de référence. Cet écart en temps, multiplié par la pulsation HF (pulsation HF = $2 * \pi * \text{fréquence HF}$) donne ce que l'on appelle l'écart en phase HF. Mais il faut être bien clair : l'écart en phase HF est un moyen d'expression de la position relative longitudinale d'une particule. Car, à un instant donné, par définition, toutes les particules sont à la même phase.

- la division des vitesses transversales (axiale et radiale) par le module de la vitesse absolue de la particule de référence donne les pentes des trajectoires par rapport à l'axe optique. La multiplication des vitesses transversales par la masse de la particule de référence donne les différences des quantités de mouvement transversales.

- la vitesse relative longitudinale se confond avec l'écart des vitesses absolues si la trajectoire de référence est rectiligne. Mais il n'en est pas de même en présence d'un champ magnétique, parce que ce dernier incurve la trajectoire de référence, ce qui entraîne une rotation des axes de coordonnées cités plus haut. La grandeur de la vitesse relative longitudinale, bien qu'utile dans la compréhension du mouvement des particules, est donc dépendante du champ magnétique. Pour

s'affranchir de cette dépendance, on fait appel, au premier ordre, à la différence des modules des vitesses absolues, à la différence des modules des quantités de mouvement, ou encore à la différence des énergies totales.

- notons en passant que les quantités de mouvement, comme les énergies, sont d'un emploi plus pratique que les vitesses pour les accélérateurs de très haute énergie.

Les transpositions au premier ordre sont toutes linéaires.

2.12.3. Espace des phases et émittance.

D'une manière générale, chaque particule d'un même paquet peut être représentée à un instant donné par ses six coordonnées relatives, dans un espace à 6 dimensions à axes orthogonaux, appelé *espace des phases*, concept emprunté à la mécanique statistique. La particule de référence se trouve par définition située à l'origine des axes de coordonnées. Indiquons que chaque particule décrit dans cet espace un mouvement de caractère périodique, d'excursion limitée, lorsque l'on a affaire à un faisceau stable.

A un instant donné, la situation dans l'espace des phases de l'ensemble des particules appartenant à un même paquet constitue ce que l'on appelle l'*émittance* de ce paquet de particules.

2.12.4. Méthodes de calcul de l'évolution de l'émittance.

Pour suivre par le calcul l'évolution de l'émittance le long de la trajectoire du faisceau, il existe deux façons de procéder, toutes deux complémentaires.

La méthode la plus rigoureuse consiste à calculer, en séquence, les trajectoires des différentes particules d'un même paquet. C'est possible, car dans un cyclotron le nombre de tours ne dépasse pas quelques centaines, ce qui préserve la précision du calcul numérique *pas à pas* auquel il est nécessaire de faire appel. Cette manière de procéder donne des résultats tout-à-fait réalistes, car elle tient compte en particulier des aberrations dues à la nature sinusoïdale du champ accélérateur. La simulation d'un paquet d'ions se fait à l'aide d'une centaine de particules au moins, dont les coordonnées initiales sont représentatives de l'émittance.

Cependant, le comportement du faisceau dans les lignes de transfert, dans les cheminements d'injection et d'éjection des accélérateurs, n'est pas sujet à d'importantes aberrations. Les méthodes de calcul au premier ordre, beaucoup plus rapides et plus faciles d'exploitation sont donc préférables dans ces derniers cas, et elles ont surtout la faculté de permettre l'analyse précise du comportement du faisceau en cours d'accélération, vu sous son aspect au premier ordre. Ce sont ces méthodes que nous allons décrire.

Lorsque les particules d'un même paquet sont très proches les unes des autres, on peut considérer que leur mouvement relatif dans l'espace réel peut être défini avec une approximation satisfaisante par un système de trois équations du second ordre, linéaires, utilisant le temps comme paramètre (soit l'équivalent de six équations du premier ordre, et linéaires). Les solutions de ce système, entre l'instant initial " t_1 " et l'instant final " t_2 " permettent d'établir ce que l'on appelle la *matrice de transfert au premier ordre*, applicable à l'ensemble des particules entourant la particule de référence. Cette matrice se présente sous la forme d'un tableau de valeurs, de dimensions 6 sur

6. A partir de ce tableau de valeurs, on peut immédiatement calculer les coordonnées d'une particule quelconque à l'instant final " t_2 ", connaissant les coordonnées de cette particule à l'instant initial " t_1 ". Dans de nombreux cas, où le mouvement axial peut être considéré comme découplé du mouvement radial, on peut présenter la matrice de transfert sous la forme de deux tableaux indépendants : une matrice de dimensions 2 sur 2 pour le mouvement axial, qui est perpendiculaire au plan médian, et une matrice de dimensions 4 sur 4 pour le mouvement radial, contenu dans le plan médian. Pour une information plus précise sur l'élaboration de la matrice de transfert, se référer à l'annexe 2.

Cependant, si l'on a affaire à un très grand nombre de particules, il devient peu pratique de s'intéresser au mouvement de chacune d'entre elles. L'analyse des résultats devient laborieuse. Une vision globale du comportement de l'ensemble des particules apparaît alors souhaitable. Ce qui peut s'obtenir aisément si l'on accepte l'hypothèse suivante.

Il est convenu de considérer que l'ensemble des particules d'un même paquet se trouve contenu, dans l'espace des phases, et à un instant donné, à l'intérieur d'un hypervolume ayant la forme d'un hyperellipsoïde à six dimensions (que nous appellerons ellipsoïde, pour simplifier). Notons qu'il ne faut que 21 paramètres pour définir un ellipsoïde à six dimensions dont le centre est fixé.

Dans cette hypothèse, il suffira de suivre l'évolution de cet hypervolume, qui constitue l'enveloppe de l'ensemble des particules d'un même paquet.

L'opération de *transfert* de l'ellipsoïde de l'instant " t_1 " à l'instant " t_2 " se fera en utilisant la matrice de transfert au premier ordre correspondante. L'ellipsoïde défini à l'instant " t_1 " par un polynôme du second degré, se transforme en un autre ellipsoïde à l'instant " t_2 ", car dans une transformation linéaire le degré d'un polynôme ne change pas.

Pour information, du fait des propriétés des polynômes du second degré, l'opération de transfert peut se faire en utilisant un formalisme remarquablement simple, mettant en jeu d'une part les éléments d'un tableau matriciel dans lequel sont rangés les paramètres définissant l'ellipsoïde et d'autre part les éléments de la matrice de transfert.

Complétons ce paragraphe en indiquant les hypothèses simplificatrices généralement admises concernant la répartition des particules à l'intérieur de l'ellipsoïde. On peut dans un premier temps supposer que la densité des particules est constante. Si l'on veut pousser plus loin le réalisme, on peut alors considérer que la densité diminue de manière progressive quand on s'éloigne du centre de l'ellipsoïde, selon une loi convenue, et en admettant que les surfaces de même densité soient des ellipsoïdes homothétiques. Le principe de la superposition est valable. Dans ces conditions, le suivi de l'évolution de l'émittance n'engage pas d'opérations supplémentaires.

2.12.6. Influence de l'accélération sur l'évolution de l'émittance au premier ordre.

La représentation de l'émittance par un ellipsoïde est une commodité facilitant la compréhension des phénomènes. Précisons cependant que la propriété que nous allons rappeler est relative au volume de *petites dimensions* définissant l'émittance d'un paquet de particules dans

l'espace des phases, même si la forme de ce volume n'est pas effectivement un ellipsoïde.

Par principe, entre l'instant initial " t_1 " et l'instant final " t_2 ", le volume d'émittance varie proportionnellement au déterminant de la matrice de transfert correspondante.

L'évolution de ce déterminant se calcule par la formule de Liouville¹⁵. La matrice de transfert appartient au domaine d'application de cette formule, car elle est provient de la résolution d'un système d'équations différentielles (au nombre de six dans notre cas), du premier ordre, et linéaires.

Ces équations utilisent le temps comme paramètre, mais leurs coefficients dépendent du choix des jeux de variables utilisés pour définir les coordonnées des particules dans l'espace des phases. Seuls, ceux de ces coefficients (au nombre de six dans notre cas) qui entrent dans la formule de Liouville interviennent dans l'évolution du déterminant de la matrice de transfert.

L'application de la formule de Liouville permet de préciser les propriétés suivantes du volume d'émittance.

Le volume représentant l'émittance ne varie pas en cours d'accélération si les coordonnées utilisées pour situer les particules dans l'espace des phases sont **canoniques**. Il en est ainsi par exemple lorsque l'on utilise comme coordonnées les **positions relatives** et les **différences des quantités de mouvement**.

Si les coordonnées ne sont pas canoniques, le volume d'émittance évolue en cours d'accélération. Le rapport des volumes entre l'état final et l'état initial est, bien sûr, fonction du choix du système de coordonnées. Ce rapport peut, en principe, ne s'exprimer qu'en fonction des valeurs prises par le facteur relativiste de la particule de référence, dans son état initial et dans son état final.

Si l'énergie de la particule de référence ne varie pas, le volume ne varie pas, et cela quel que soit le système de coordonnées choisi.

Se reporter au formulaire pour plus de précision sur ce sujet.

2.13. Adaptation de l'émittance dans un champ isochrone.

2.13.1. Généralités.

L'émittance d'un faisceau **non accéléré** est dite adaptée lorsque l'ellipsoïde représentant l'émittance se retrouve identique à lui-même après un parcours égal à la longueur d'une maille le long de l'orbite d'équilibre qui lui correspond. La notion d'adaptation se rapporte donc au comportement intrinsèque d'un groupe de particules.

Les conditions d'adaptation, en l'absence d'accélération, dans le cas d'un découplage des mouvements radiaux et axiaux sont résumées en référence⁵ pour ce qui concerne le sous espace des phases à quatre dimensions du plan radial.

L'adaptation à l'injection dans un cyclotron s'obtient par un réglage adéquat des éléments

d'optique situés en amont du point d'injection des ions. Une ligne d'injection doit donc être équipée d'éléments d'optique en nombre suffisant pour permettre les actions désirées dans toutes les dimensions de l'espace des phases.

En situation d'accélération modérée, on admet que l'ellipsoïde correspondant à une émittance adaptée au départ conserve ses propriétés d'adaptation.

L'intérêt d'accélérer un faisceau bien adapté est considérable. Une bonne adaptation maintient les paquets de particules dans des dimensions exemptes de grandes fluctuations. De la sorte, on minimise les distorsions, en particulier celles qui sont dues à la nature sinusoïdale du champ accélérateur, et l'on évite les pertes de faisceau dans les canaux d'injection et d'éjection. On notera qu'aucune action d'adaptation n'est possible sur les cyclotrons équipés d'une source interne.

2.13.2. Commentaires sur l'adaptation.

Examinons qualitativement les conditions d'une bonne adaptation, en commençant par le plan radial.

Notons que le fonctionnement isochrone n'impose aucune condition d'adaptation dans le sous-espace des phases longitudinal. Toutefois, la ligne d'injection doit comporter un système de *groupement* longitudinal s'il s'agit d'injecter le faisceau continu provenant d'une source d'ions, ou de *regroupement* si le faisceau possède déjà une structure en paquets. Le but est de placer sur orbite les paquets dans une dimension longitudinale aussi petite que possible, afin de minimiser les aberrations qui se créent en accélération du fait de la nature sinusoïdale de la tension HF. Le groupement génère inévitablement de la dispersion en énergie, et le regroupement de même. La dispersion en énergie résultante se répercute sur les dimensions radiales du faisceau adapté, comme nous verrons un peu plus loin, et par conséquent l'action longitudinale devra être pondérée.

Dans le sous-espace des phases transversal radial, la relation d'adaptation doit être réalisée dans un premier temps comme si ce sous espace était indépendant.

Mais cela ne suffit pas. Il faut impérativement assurer la relation d'adaptation qui relie le sous-espace transversal radial au sous-espace longitudinal. En d'autres termes, il faut assurer la *corrélation* adéquate de ces deux sous-espaces. La corrélation se compose de deux termes de couplage 5.

Le premier terme, le plus important en pratique, lie l'écart longitudinal à la quantité de mouvement transversale (ou toute autre grandeur équivalente). Par l'effet des *relations symplectiques*, ce terme s'identifie au terme de couplage liant l'écart transversal à la quantité de mouvement longitudinale (ou toute autre grandeur équivalente).

Le deuxième terme lie l'écart longitudinal à l'écart transversal. Toujours par l'effet des relations symplectiques, ce terme s'identifie, au signe près, au terme liant la quantité de mouvement transversale à la quantité de mouvement longitudinale. La valeur de ce terme est nulle si l'adaptation du faisceau est calculée pour un point d'injection situé sur un axe de symétrie du champ magnétique (donc nulle aussi pour un champ de révolution, ce qui est pratiquement la

situation au centre des cyclotrons compacts).

Enfin dans le sous-espace des phases axial, dans le cas où celui-ci est *découplé* du sous-espace radial, on réalisera l'adaptation classique de manière analogue à l'adaptation du sous-espace des phases transversal radial, sans corrélation avec le mouvement radial.

2.13.3. Caractéristiques des défauts d'adaptation.

Un défaut d'adaptation dans l'un quelconque des deux sous-espaces transversaux entraîne dans ce sous-espace une fluctuation de la largeur de l'enveloppe transversale à une fréquence relative **égale au double du nombre d'onde** correspondant.

Un défaut concernant la valeur du terme de corrélation cité en premier lieu dans le paragraphe précédent entraîne une fluctuation de l'enveloppe transversale radiale, et de l'enveloppe longitudinale, à une fréquence relative **égale au nombre d'onde** radial " ν_r ".

Un défaut concernant la valeur du deuxième terme de corrélation entraîne une fluctuation de la valeur maximale de la quantité de mouvement transversale radiale, et de l'enveloppe longitudinale, à une fréquence relative **égale au nombre d'onde** radial " ν_r ".

D'autre part on se rappellera qu'un défaut d'alignement, radial ou axial, de l'axe optique cause un mouvement de précession de fréquence relative égale au nombre d'onde correspondant. Mais ce type de défaut, par sa nature, ne se classe pas dans la catégorie des défauts d'adaptation.

2.13.4. Détection et analyse des défauts.

Intéressons-nous maintenant aux aspects pratiques de la détection des défauts d'adaptation.

Il est hors de question de suivre le mouvement des particules dans leur déplacement azimutal. Dans la pratique on se sert d'une sonde mobile se déplaçant radialement, à azimut constant, dans la plan médian. Cette sonde est équipée de manière à permettre la mesure de la *densité radiale* du faisceau, et d'avoir aussi une indication approximative de la position et de l'extension du faisceau dans le sens axial. On analyse les résultats à l'aide d'une représentation graphique.

Si les orbites sont séparées, on observera radialement une série de *pics* correspondant aux orbites successives. L'amplitude des pics est proportionnelle à la densité de courant, donc inversement proportionnelle à la dimension radiale du faisceau (figure 7).

Dans une machine parfaitement réglée, cette amplitude devrait rester sensiblement constante (précisément, décroissance en " $1/\gamma$ "), et l'intervalle entre deux pics successifs devrait décroître approximativement comme l'inverse du rayon.

Mais dans la pratique, des imperfections de réglage ou de champ magnétique interviennent à des degrés divers, entraînant des irrégularités observables sur les enregistrements.

L'interprétation correcte de ces irrégularités est conditionnée par la compréhension des effets de stroboscopie qui sont intrinsèquement liés au fait que les phénomènes, par nécessité, ne sont observés qu'à un azimut donné au lieu d'être observés en continu.

Dans le cas qui nous intéresse, les caractéristiques de l'effet stroboscopique peuvent se décrire comme suit.

Considérons d'une part un observateur, évidemment fictif, qui aurait la faculté d'observer les

fluctuations du faisceau de manière continue, tout au long de sa trajectoire.

Appelons "p" le rapport suivant :

(fréquence d'une fluctuation périodique du faisceau) / (fréquence de rotation des particules)

Comme indiqué au paragraphe 2.13.3, ce rapport s'identifie au nombre d'onde dans le cas où il s'agit d'un défaut de corrélation, ou d'une précession, et au double du nombre d'onde s'il s'agit d'un défaut d'adaptation.

D'autre part appelons "n" le nombre de pics caractérisant la périodicité de cette fluctuation, telle qu'elle se manifeste dans les faits pour un observateur réel qui ne dispose que des signaux provenant d'une sonde se déplaçant le long d'un azimuth fixe.

L'effet stroboscopique répond alors à la loi suivante :

- | | | |
|--------------------------------|-------------------|-------------------------------|
| - "p" compris entre 0 et 0.5 | $n = 1 / p$ | (n varie entre l'infini et 2) |
| - "p" compris entre 0.5 et 1.0 | $n = 1 / (1 - p)$ | (n varie entre 2 et l'infini) |
| - "p" compris entre 1.0 et 1.5 | $n = 1 / (p - 1)$ | (n varie entre l'infini et 2) |
| - "p" compris entre 1.5 et 2.0 | $n = 1 / (2 - p)$ | (n varie entre 2 et l'infini) |
| - "p" compris entre 2.0 et 2.5 | $n = 1 / (p - 2)$ | (n varie entre l'infini et 2) |
| - "p" compris entre 2.5 et 3.0 | $n = 1 / (3 - p)$ | (n varie entre 2 et l'infini) |
| - etc... | | |

Les défauts mentionnés au paragraphe 2.13.3 seront donc observés sur les enregistrements avec la périodicité calculée selon cette loi, en prenant pour "p" les valeurs suivantes :

pour un défaut d'adaptation : "p" = 2 fois le nombre d'onde,

pour une précession et pour un défaut de corrélation : "p" = nombre d'onde.

Nota : dans les cyclotrons, les nombres d'onde supérieurs à 2 ne se rencontrent pas.

2.14. Effets non linéaires.

L'optique en général, et l'optique corpusculaire en particulier sont basées sur des transformations linéaires. Toute action non linéaire entraîne des distorsions dont la conséquence sur le faisceau est de détériorer ses qualités : grossissement apparent des enveloppes transversales, augmentation de la dispersion en énergie.

Champ de guidage. Les effets de non linéarité sont provoqués par des passages répétés d'un faisceau relativement large dans les zones de fort gradient que sont les bords des secteurs, par les irrégularités locales du champ magnétique, par les défauts d'alignement, par le manque de stabilité du champ. Ces effets sont pratiquement peu importants dans les cyclotrons modernes.

Champ accélérateur. On utilise pour l'accélération un champ sinusoïdal, car on ne peut pas pratiquement réaliser une tension accélératrice en créneau, ce qui serait évidemment l'idéal. Les tensions requises, les puissances nécessaires ne sont pas réalisables dans le domaine des fréquences utilisées. Les distorsions dues à l'emploi d'une tension accélératrice sinusoïdale sont, de loin, les plus importantes dans un cyclotron.

Deux méthodes sont employées pour réduire les effets non linéaires. La première consiste à

réduire la longueur des paquets d'ions pour rester dans le domaine de l'approximation de Gauss, c'est-à-dire de l'optique linéaire. On y parvient par l'emploi de groupeurs ou de regroupeurs HF placés dans les lignes d'injection. Pour les cyclotrons équipés d'une source interne, cette disposition est bien sûr impossible. On a alors recours à des collimateurs (fentes) placés au niveau des premiers tours. Ce procédé entraîne inévitablement une perte d'intensité.

L'autre méthode est basée sur l'emploi d'électrodes accélératrices supplémentaires, fonctionnant sur des fréquences multiples de la fréquence accélératrice principale. Le réglage correct de l'amplitude et de la phase des électrodes précitées permet de redresser très efficacement le défaut de linéarité de la tension accélératrice principale. Ce processus porte le nom de *flat-topping*. Les paquets d'ions peuvent alors conserver leur longueur naturelle sans trop d'inconvénient. Le flat-topping diminue légèrement la valeur globale du gain en énergie par tour.

2.15. Charge d'espace.

Les effets de répulsion coulombienne entre les particules d'un même paquet d'ions entraînent des distorsions notables dès lors que la densité des particules dépasse un certain seuil. Le phénomène est particulièrement sensible pour les faisceaux à basse énergie. Dans un cyclotron isochrone, la longueur des paquets d'ions s'accroît très rapidement dès les premiers tours d'accélération. La densité des ions décroît donc rapidement et l'effet de charge d'espace ne se fait donc sentir qu'en début d'accélération, pour devenir négligeable par la suite. Néanmoins, l'accroissement indésirable de l'émittance au moment de l'injection des ions, conséquence de la charge d'espace, reste acquis.

Les effets de charge d'espace entraînent une très sérieuse limitation de l'intensité que l'on pourrait injecter avec les sources d'ions externes actuelles qui sont devenues très performantes, qu'il s'agisse d'ions légers ou d'ions lourds.

Notons que l'on sait lutter contre les effets de la charge d'espace dans le sens transversal à l'aide d'une focalisation transverse adéquate, dans la ligne d'injection, comme dans l'accélérateur. Par contre, le maintien du groupement longitudinal dans le champ isochrone d'un cyclotron n'est pas envisageable : la stabilité de phase est absente. Il faut donc accélérer au plus vite pour bénéficier de l'effet de l'allongement des paquets d'ions sur la diminution de la densité. Et, bien entendu, la présence d'un dispositif de flat-topping permettra d'accélérer des paquets plus longs, pour une même densité initiale, et donc d'obtenir une intensité moyenne plus élevée.

Le système accélérateur de PSI montre bien comment les effets de charge d'espace sont pris en compte pour un faisceau à très forte intensité. Le but de cette installation est de pouvoir accélérer un faisceau de protons d'une intensité d'au moins un milliampère à une énergie de 590 MeV. Le premier étage d'accélération est constitué d'une source de protons montée sur une plate-forme électrostatique de 800 kV. Le faisceau continu de plusieurs milliampères est injecté, sur un rayon relativement grand par conséquent, dans un premier étage d'accélération qui est un cyclotron à secteurs séparés d'une énergie finale de 72 MeV. Un groupement du faisceau dans la ligne

d'injection n'est pas nécessaire, la source de protons étant surabondante. Le système accélérateur comporte des électrodes de flat-topping. Des systèmes de fentes permettent d'éliminer les particules qui sont en dehors de la largeur en phase souhaitable pour la poursuite de l'accélération.

Les sources d'ions lourds étant moins performantes que les sources de protons, on utilise en général un groupement des particules à l'injection. Dans les installations actuelles, l'injection se fait à une énergie relativement basse dans un cyclotron compact, et l'on opère un groupement des ions injectés, dans la limite permise par les effets antagonistes de charge d'espace.

Un moyen efficace pour diminuer l'effet de charge d'espace à l'injection dans un cyclotron est d'allonger la longueur des paquets injectés. Mais attention : cette opération ne doit pas se faire au détriment de la longueur **en phase** des paquets. Ce qui revient à augmenter le rayon d'injection, donc aussi l'énergie d'injection. Cette opération n'est pas du domaine des réglages, car le rayon d'injection est fixé par construction.

Notons que l'augmentation de l'énergie d'injection a aussi pour effet de réduire le temps de transit du faisceau entre la source d'ions et la zone d'accélération, ce qui constitue un avantage supplémentaire, mais moins important. D'autre part il est souhaitable que le groupeur soit placé assez près du point de première accélération.

2.16. Résonances.

Le comportement d'un faisceau peut devenir instable dans certaines circonstances. On se référera à Brück² (chapitre X et résumé figurant page 110).

Les résonances mettent en cause des valeurs particulières que peuvent prendre les nombres d'onde "nu r" et "nu z" au cours de l'accélération. Parmi les plus connues, citons la résonance :

$$\text{nu r} = 1$$

que l'on rencontre dans les zones d'injection et d'éjection des cyclotrons compacts. Dans la zone d'injection, on est très proche de cette résonance, car le facteur relativiste est égal à l'unité, et la modulation azimutale du champ est inexistante. Mais l'accroissement rapide du rayon fait que la traversée de cette résonance ne pose pas de problème. Dans la zone d'éjection, pour rendre le processus plus aisé, le faisceau est souvent extrait un peu au delà de la limite du champ isochrone, à un rayon où la décroissance du champ fait traverser cette résonance.

La résonance de Walkinshaw affecte particulièrement les cyclotrons compacts de haute énergie. Elle est de la forme :

$$\text{nu r} = 2 * \text{nu z}$$

Comme "nu z" augmente très rapidement dès que le faisceau aborde la zone de champ de fuite, il faut s'efforcer d'extraire le faisceau avant qu'il ne traverse cette résonance.

Citons aussi la résonance suivante qui est dite fondamentale pour les cyclotrons compacts à trois secteurs, comme par exemple AGOR :

$$\text{nu r} + 2 * \text{nu z} = 3$$

On minimise l'effet des résonances en les franchissant le plus rapidement possible, d'où

l'intérêt d'utiliser une tension accélératrice élevée. Mais mieux vaut cependant les éviter.

Les cyclotrons à secteurs séparés posent moins de problèmes. Si, par construction, le nombre et la forme des secteurs ont fait l'objet d'un choix bien étudié, le fonctionnement stable sera assuré en toutes configurations.

La traversée des zones d'injection et d'éjection des cyclotrons à secteurs se fait en moins d'un tour. Les résonances que l'on traverse obligatoirement dans ces zones à fort gradient restent donc sans effet.

2.17. Injection des ions.

2. 17.1. Cyclotrons compacts.

L'injection des ions sous-entend que l'on dispose d'un faisceau d'ions produit extérieurement au cyclotron. La question ne se pose pas pour les cyclotrons équipés d'une source interne.

Le but recherché est d'amener les ions dans le plan médian, à la bonne place, groupés en paquets dont l'émittance est adaptée à l'acceptance du cyclotron dans l'espace des phases à six dimensions. Pour ce faire, il faut disposer, en amont du cyclotron, d'une voie de faisceau, pourvue d'éléments d'optique en nombre suffisant pour assurer les conditions d'adaptation désirées, et complétée par un dispositif de *mise sur orbite initiale*. La conception de la voie de faisceau précédant l'injection doit donc se faire en tenant compte des propriétés optiques particulières de ce dispositif de mise sur orbite.

La source d'ions externe est portée à un potentiel électrostatique réglé en fonction de l'état de charge des ions, de la valeur du rayon d'injection, ce dernier étant fixe par construction, et du niveau du champ magnétique sur lequel est réglé le cyclotron. Le potentiel de la source doit être bien stable.

Dans la plupart des cyclotrons compacts actuels, l'injection se fait selon la direction axiale (perpendiculaire au plan médian). La mise sur orbite dans le plan médian se fait à l'aide d'un inflecteur électrostatique. L'axe d'injection est voisin ou confondu avec l'axe du cyclotron, selon le type d'inflecteur utilisé.

Il existe trois modèles d'inflecteur électrostatique :

- l'inflecteur de W. B. Powell et B. L. Reece, appelé *miroir* électrostatique, dont la mise au point à l'Université de Birmingham date du début des années 60. Le miroir est constitué d'une petite électrode plane inclinée à 45 degré, portée à un potentiel positif. Une grille plane, parallèle au miroir et distante de quelques millimètres est mise au potentiel de la masse. Les particules traversent la grille, sont déviées de 90 degrés par le champ électrique, et ressortent dans le plan médian du cyclotron. Le potentiel à appliquer au miroir est relativement élevé, presque égal au potentiel d'injection, ce qui en restreint les applications, mais son encombrement est très faible. Ce type d'inflecteur est encore utilisé sur quelques cyclotrons comme celui de Berkeley.

- l'inflecteur de R. W. Müller ⁶, dont les deux électrodes, placées en regard l'une de l'autre,

sont des portions d'hyperboloïdes de révolution. Comme dans le cas du miroir électrostatique, l'axe d'injection doit être légèrement décalé par rapport à l'axe du cyclotron pour que le faisceau ressorte dans le plan médian et correctement centré. Le faisceau reste équidistant des deux électrodes, et celles-ci sont portées à des potentiels symétriques par rapport à la masse.

- l'inflecteur de J. L. Belmont et J. L. Pabot ⁷, encore appelé inflecteur spirale, de forme plus complexe que le précédent, mais plus compact et dont l'axe d'entrée peut être confondu avec celui du cyclotron, ce qui lui confère une certaine souplesse d'utilisation.

Le faisceau continu émis par la source doit être adapté à l'acceptance du cyclotron, transversalement et longitudinalement, si l'on veut minimiser les pertes et obtenir un faisceau accéléré de bonnes caractéristiques. Une ligne de faisceau d'injection dans un cyclotron compact doit donc comporter des éléments d'optique en nombre suffisant pour assurer toutes les fonctions désirées. L'une des principales causes d'aberration dans un cyclotron provenant de la non-linéarité de la tension accélératrice, on s'efforcera d'obtenir un groupement longitudinal aussi étroit que possible au moment de la mise sur orbite d'injection. De plus, comme les tensions appliquées aux électrodes de groupement longitudinal sont, elles aussi, sinusoïdales, on s'efforcera d'améliorer la linéarité du processus de groupement par l'utilisation d'une tension de groupement additionnelle sur un mode harmonique.

Si l'on cherche à accélérer des faisceaux intenses, le cyclotron devra être équipé d'une source d'ions portée à un potentiel aussi élevé que possible afin de minimiser le dégroupement indésirable, provoqué par la charge d'espace, lors de la mise sur orbite et sur les premiers tours. Il faudra aussi réaliser une ligne de faisceau permettant l'adaptation dans les six dimensions de l'espace des phases. Le nouveau cyclotron injecteur de GANIL a bénéficié d'une injection construite selon ces principes ^{8 9} (ce sera aussi le cas du cyclotron Spiral). Le rendement de transmission du faisceau entre l'entrée et la sortie du cyclotron peut atteindre 75 pour cent, en l'absence de charge d'espace, et reste supérieur à 50 pour cent dans les cas où l'intensité est importante. En fonctionnement de routine, on peut ainsi obtenir un courant de 50 microampères de Carbone trois fois chargé à la sortie du premier cyclotron de GANIL, pour une intensité injectée de 100 microampères.

Les quelques cyclotrons compacts utilisant un autre accélérateur comme injecteur n'ont pas la possibilité de fonctionner en injection axiale, car l'énergie du faisceau à l'injection est trop importante pour permettre l'utilisation d'un inflecteur. Ces cyclotrons fonctionnent avec des ions lourds, et la mise sur orbite se fait par l'épluchage du faisceau qui est injecté dans le plan médian (cyclotron de Chalk River, cyclotron de Catane).

2. 17. 2. Cyclotrons à secteurs séparés.

Les cyclotrons à secteurs séparés ne sont pas adaptés à une injection à basse énergie, comme le sont les cyclotrons compacts. Par construction, la zone centrale est située hors de l'emprise du champ principal. Le rayon d'injection, assez grand, permet de mettre sur orbite un faisceau ayant déjà subi une accélération importante. Sauf cas particulier, l'injection s'opère en dirigeant le faisceau incident vers la région centrale, dans le plan médian, où il est mis sur orbite par le moyen

d'une succession de dipôles. En général le dernier dipôle est électrostatique, car il doit être le plus mince possible. L'injection par épluchage reste concevable s'il s'agit d'ions lourds.

2. 17. 3. Cas particuliers.

Le grand cyclotron de TRIUMF est équipé d'une injection axiale avec inflecteur spirale pour des ions H⁻ de 300 KeV. Bien que ce cyclotron puisse paraître à première vue semblable à un cyclotron à secteurs séparés, son architecture est en fait celle d'un cyclotron compact : les bobines principales sont communes aux 6 secteurs, et le champ magnétique s'étend jusqu'au centre.

Le cyclotron injecteur de PSI est à secteurs séparés. L'injection de protons de 800 KeV se fait axialement, et l'inflecteur est un aimant.

2.18. Extraction des ions.

Quel que soit le type de cyclotron, on pourrait penser qu'il suffit de poursuivre le processus d'accélération jusqu'à ce que le faisceau sorte tout naturellement du champ magnétique. Encore faudrait-il que le champ de fuite radial ait une chute suffisamment rapide pour que l'accélération ne s'arrête pas par défaut d'isochronisme. De plus, le passage répété dans le champ de fuite produirait une défocalisation dans le plan radial inacceptable.

La règle générale est donc de procéder à l'extraction du faisceau dès que ce dernier a atteint la limite du champ isochrone.

Les systèmes d'extraction sont constitués de dipôles créant une force radiale tendant à dévier le faisceau vers l'extérieur, le plus rapidement possible, de manière à franchir le champ de fuite au plus vite. Le premier dipôle est presque toujours électrostatique, les suivants sont de même nature ou bien encore magnétiques. On notera que le faisceau extrait d'un cyclotron compact subit une défocalisation radiale très importante, car on ne peut pas éviter une traversée progressive du champ de fuite. Il faut donc combattre cet effet nuisible par des systèmes annexes focalisant puissamment. Les cyclotrons à secteurs séparés ne connaissent pas ces inconvénients, car le faisceau sort du champ magnétique sous un angle voisin de la normale aux lignes de même intensité de champ, donc sans conséquences importantes sur la focalisation.

La séparation entre orbites successives étant relativement faible au rayon d'extraction, il est des situations où les paquets d'ions appartenant à des orbites différentes peuvent se recouvrir. On ne peut alors pas espérer effectuer une extraction à tours séparés. Le faisceau extrait se composera d'un mélange de portions de paquets d'ions appartenant à des orbites différentes, la dispersion en énergie du faisceau sera augmentée. Pour les cyclotrons compacts, on peut cependant améliorer l'efficacité du processus d'extraction par une augmentation locale de la séparation des orbites, en utilisant la résonance " $\nu_r = 1$ ". Cette méthode n'est pas vraiment utilisable dans les cyclotrons à secteurs séparés car on se trouve relativement loin de cette résonance. On préfère utiliser le processus de précession (cf. paragraphe 2.7.2) qui a l'avantage d'être très efficace et qui ne détériore pas l'émittance du faisceau si l'on en fait un usage modéré. La précession est introduite en début d'accélération et se maintient naturellement jusqu'à l'extraction. En début d'accélération, la

précession présente l'avantage supplémentaire de faciliter la mise sur orbite initiale.

Pour provoquer une précession à l'injection, il suffit de modifier légèrement l'angle, la position du faisceau injecté. On peut aussi utiliser une petite perturbation locale de champ.

A noter qu'à PSI on se sert de la résonance "nu r = 1.5" pour l'extraction du faisceau de protons de 590 MeV.

2.19. Couplage des cyclotrons.

Il est parfois avantageux d'utiliser deux cyclotrons disposés en cascade, plutôt qu'un seul cyclotron, à performances égales. L'accélération préliminaire du faisceau est même une nécessité lorsqu'on utilise un cyclotron à secteurs séparés, qui par construction ne peut pas accélérer de particules dans sa région centrale, dépourvue de champ magnétique. Bien entendu, l'étage amont d'un cyclotron à secteurs séparés n'est pas obligatoirement un cyclotron.

Un exemple de couplage est fourni par l'accélérateur à protons de PSI. L'étage final, un gros cyclotron à hautes performances nécessitant des tensions d'accélération très élevées, est couplé à un cyclotron injecteur du type à secteurs séparés. Cet injecteur est lui-même alimenté par le faisceau provenant d'une plate-forme électrostatique à très haute tension, capable de porter l'énergie des protons au niveau correspondant au rayon de mise sur orbite.

Pour l'accélération d'ions lourds, le couplage de deux cyclotrons devient particulièrement intéressant lorsqu'il permet l'utilisation d'un *éplucheur d'ions*. L'éplucheur, disposé sur la ligne de faisceau reliant les deux accélérateurs, a pour rôle d'augmenter l'état de charge des particules. On se rappellera que l'énergie finale d'un cyclotron est proportionnelle au carré de l'état de charge des ions, d'où l'intérêt d'une telle disposition.

L'accélérateur SARA de Grenoble est un exemple de couplage de ce dernier type. On peut aussi citer GANIL, qui comporte trois cyclotrons en cascade. Il n'existe pas d'éplucheur entre les deux premiers étages de GANIL, car l'énergie acquise est encore insuffisante pour augmenter l'état de charge. L'éplucheur est situé en aval du deuxième étage, où l'énergie des particules permet de multiplier l'état de charge par le facteur 2.5 en moyenne. Pour SARA, ce facteur est voisin de 2.

Il faut savoir que dans la plupart des cas, le *rendement* d'un éplucheur n'est pas égal à l'unité. L'éplucheur produit une gamme d'états de charge voisins, qui est centrée sur ce que l'on appelle *l'état de charge le plus probable*. Or l'étage d'accélération aval ne peut être réglé que sur un seul état de charge, d'où une diminution du flux de particules pouvant être accepté par cet étage. En pratique, la perte de particules est négligeable dans le cas des ions légers, parce qu'ils peuvent être complètement épluchés, mais la perte peut atteindre 90 pour cent du flux de particules pour les ions les plus lourds.

Le couplage de cyclotrons obéit à des règles de bon sens. Citons-les globalement :

- en principe tout paquet d'ions provenant du premier étage doit pouvoir être accéléré par le second. En général le premier étage fournit un paquet d'ions par période HF. On s'arrangera donc pour que la fréquence du deuxième étage soit la même que celle de l'étage amont, ou encore un

multiple. Dans ce dernier cas on se rappellera que la largeur en phase des paquets d'ions injectés dans le deuxième étage se trouve accrue par le rapport des fréquences. Il est possible théoriquement d'envisager aussi un rapport de fréquences qui soit un nombre fractionnaire dans des cas particuliers,

- l'énergie ne varie pas entre les deux étages, si l'on sait compenser la très faible perte d'énergie dans l'éplucheur,

- la rigidité magnétique $B\rho = (m * v) / q$ est diminuée par le rapport d'épluchage (le rapport d'épluchage est le rapport des charges "q" entre l'aval et l'amont de l'éplucheur).

On notera aussi que le rapport du rayon d'extraction de l'étage amont au rayon d'injection dans l'étage aval est un nombre fractionnaire, et que ce nombre est déterminé par construction. Le rapport des harmoniques HF est lui aussi un nombre fractionnaire, en général fixe, mais susceptible d'être modifié, dans des cas particuliers, sans atteinte à la géométrie de l'installation.

2.20. Compression de phase.

Pour minimiser les effets non linéaires provoqués par la variation sinusoïdale de la tension accélératrice, on a tout intérêt à injecter des paquets d'ions bien groupés dans le sens longitudinal. Normalement on utilise pour cela des groupeurs, pour les cyclotrons compacts, ou des regroupeurs placés dans les lignes de faisceau précédant l'injection dans les cyclotrons à secteurs séparés.

Il existe d'autres moyens de regroupement longitudinal connus sous l'appellation de *méthodes de compression de phase*. Le but recherché est d'effectuer un regroupement des paquets de particules sur les premiers tours après injection. Ces méthodes ne sont utilisées que sur les cyclotrons à secteurs séparés, bien que les cyclotrons compacts puissent théoriquement en bénéficier. Nous les commentons ci-après, et pour plus de détail il y a lieu de se reporter aux références 10 11 12 13.

2. 20. 1. Compression de phase dans un champ magnétique isochrone.

Les systèmes accélérateurs des cyclotrons **isochrones** sont, dans leur grande majorité, conçus pour produire le **même gain en énergie à chaque tour**, tout au long de l'accélération. Dans ces conditions, une particule injectée une phase " ϕ " donnée conserve cette phase en cours d'accélération. Mais si le gain d'énergie par tour ne reste pas constant en cours d'accélération, cette phase " ϕ " ne restera pas constante, elle variera dans certaines limites, et cela bien que le champ magnétique soit isochrone. C'est ce que l'on constate dans les deux configurations décrites ci-après.

Premier cas. Considérons un cyclotron équipé de résonateurs *monogaps*. Dans l'hypothèse où l'extension radiale des espaces accélérateurs est non négligeable vis-à-vis de la longueur d'onde, ces espaces accélérateurs se comportent comme des portions de ligne en régime d'ondes stationnaires. Le champ accélérateur conserve la même direction, mais sa grandeur est fonction du rayon à un instant donné. Il existe donc dans ces conditions un *gradient radial de gain d'énergie par tour*. Appelons *phase zéro* la phase de toute particule traversant les espaces accélérateurs au

moment du maximum de la tension accélératrice. Les particules de phase zéro restent parfaitement isochrones en cours d'accélération, elles ne sont pas perturbées par le gradient radial de champ électrique, et elles bénéficient du gain par tour maximal. On démontre, par contre, qu'une particule quelconque, située à un rayon "R" et caractérisée à un instant donné par une phase " ϕ ", non nulle, ne reste pas exactement isochrone en cours d'accélération. La phase de la particule en question évolue comme indiqué en référence 10, formule 23, soit :

$$(dE / dn) * \text{tangente}(\phi) = \text{constante.} \quad (4)$$

(dans cette formule, "dE / dn" désigne le gain d'énergie par tour de cette particule. Ce gain d'énergie par tour est égal au gain par tour maximal au rayon "R" multiplié par $\cos(\phi)$)

Deuxième cas. Considérons un cyclotron équipé de *dees* , à champ accélérateur radialement uniforme, mais dont l'ouverture angulaire, *vue du centre machine* , varie de manière **continue** en fonction du rayon. Une telle disposition a pour conséquence que le gain d'énergie par tour varie de manière **continue** en fonction du rayon. Il existe alors un *gradient radial de gain d'énergie par tour* , et la formule (4) s'applique également à ce cas.

Dans l'une ou l'autre des configurations précédemment décrites, on s'intéressera dans la pratique à des angles de phase " ϕ " voisins de la phase zéro, et au comportement d'un paquet de particules plutôt qu'au comportement d'une particule individuelle. La formule (4) permet d'établir que la largeur en phase d'un paquet de particules diminue si le gain d'énergie par tour augmente en fonction du rayon. Notons que le phénomène inverse existe aussi, mais il est d'un emploi moins fréquent. Plus précisément, au voisinage de la phase zéro, le produit du *gain d'énergie par tour* par la *longueur du paquet* reste sensiblement constant, lorsque la particule centrale se trouve calée au voisinage de la phase d'accélération maximale.

On peut donner d'ailleurs une explication qualitative du phénomène de compression de phase d'un paquet de particules. Un gradient radial positif du gain en énergie entraîne, pour un paquet de particules donné, l'extension globale de sa dispersion en énergie, cela du fait de l'extension radiale du paquet. Dans le sous-espace des phases *largeur en phase* , *dispersion en énergie* , dont la surface est globalement invariante, car il s'agit de variables canoniques, la largeur en phase du paquet de particules diminue donc en proportion.

En conclusion, **dans un champ isochrone**, on observe une compression de l'extension en phase des paquets d'ions si le *gradient radial du gain d'énergie par tour* est positif, et le phénomène inverse existe aussi. Si le gradient est nul, ce qui constitue le cas général des cyclotrons, l'extension en phase reste constante (en toute rigueur, il faut mentionner la fluctuation azimutale de faible amplitude provoquée par la structure en mailles du champ magnétique).

2. 20. 2. Cas d'un champ non isochrone.

Une méthode différente des précédentes, d'un caractère original, permet d'obtenir un effet de compression de phase dans un champ non isochrone. Cette méthode consiste à diminuer légèrement le champ magnétique dans la région de l'injection d'un cyclotron. De ce fait le champ dans la région centrale n'est plus isochrone. La phase d'injection de la particule centrale d'un

paquet d'ions doit alors être décalée de telle façon que cette particule centrale parvienne à la phase normale d'accélération (phase zéro), une fois atteinte la zone isochrone. Ce processus est caractérisé à la fois par un *glissement longitudinal* dans un champ non isochrone, et par la traversée d'espaces accélérateurs à une phase initialement très différente de la phase optimale, le tout conduisant à une augmentation du gain d'énergie par tour. Il en résulte un effet de groupement en phase. Notons que le décalage initial en phase doit être important si l'on recherche un taux de compression significatif. D'autre part on remarquera que cette méthode présente l'avantage, sur les précédentes, de ne pas dépendre d'une structure particulière de l'accélérateur. Elle est donc en principe applicable à tout cyclotron.

2. 20. 3. Remarques et conclusions.

Aussi séduisantes soient-elles, les méthodes de compression de phase impliquent une diminution du gain d'énergie par tour à l'injection, donc un resserrement des tours. Cette situation risque de conduire, dans certaines configurations d'injection, à l'impossibilité de placer le faisceau sur orbite. D'autre part, il faut noter que la compression de phase s'accompagne d'une augmentation de la dispersion en énergie. Cela n'entraîne pas de conséquences dommageables pour le faisceau, eu égard au gain d'énergie important dont bénéficient ensuite les particules au cours de leur accélération. Cependant, les dimensions transversales du faisceau ayant augmenté, il peut y avoir risque de pertes de particules dans les canaux d'injection.

2.21. Pouvoir séparateur.

Les cyclotrons isochrones peuvent, dans des applications spéciales, servir à trier des particules appartenant à des corps différents, mais ayant des rapports *charge sur masse* très voisins. Le cyclotron est réglé précisément sur le corps que l'on veut conserver. Un corps d'état de charge voisin n'atteindra pas le rayon d'extraction si son déphasage atteint la valeur $\pi / 2$ radian en cours d'accélération. Il sera ensuite décéléré en direction du centre où il se perdra.

Le pouvoir séparateur se définit comme un nombre égal à quatre fois le nombre de périodes HF nécessaire à l'accélération des particules normales jusqu'au rayon d'extraction.

Pour augmenter le pouvoir séparateur, on peut augmenter le nombre de tours, mais la séparation radiale des tours diminue en proportion et l'on risque de ne plus se trouver dans la situation d'une extraction sur un seul tour. On peut aussi, comme cela se pratique à Louvain la Neuve, opérer une excursion en phase du faisceau en cours d'accélération, obtenue en modifiant légèrement le champ magnétique. Cette méthode a cependant l'inconvénient de détériorer les qualités du faisceau, parce que les paquets d'ions ne sont plus accélérés sur la phase optimale, et cela conduit inévitablement à une extraction sur plusieurs tours.

2.22. Mesures de masses avec un cyclotron.

La connaissance précise de la masse d'un ion est d'un grand intérêt en Physique Nucléaire, particulièrement dans le cas de l'étude d'ions radioactifs nouvellement produits.

Les mesures de masse peuvent se faire avec un spectromètre. Mais on peut aussi utiliser un cyclotron isochrone.

La formule (1) indique en effet que le rapport charge sur masse d'un ion peut être déterminé, à partir de la valeur du champ moyen le long d'une orbite d'équilibre et de la vitesse angulaire des particules circulant dans un champ isochrone. Pour espérer une précision acceptable, il y a lieu d'effectuer plusieurs centaines de tours, dans un champ isochrone bien réglé. Il faut aussi que la largeur en phase des paquets soit de l'ordre de quelques degrés de phase HF seulement.

En fait, la connaissance du champ moyen au rayon où doit se faire la mesure absolue n'est pas suffisamment précise pour pouvoir espérer une précision meilleure que 10^{-4} .

Cependant la mesure peut devenir beaucoup plus précise si l'on peut accélérer simultanément un ion de référence, dont la masse est déjà connue avec précision, et l'ion dont on cherche à mesurer la masse. La seule condition à remplir, c'est que les rapports charge sur masse soient très voisins. On fera alors une mesure d'écart en masse.

On procède comme suit. L'isochronisme du cyclotron est établi pour l'ion de référence. Les paquets d'ions injectés sont constitués d'un mélange homogène des deux types d'ions. Dans ces conditions, on observe après une accélération portant sur une centaine de tours, ou davantage si l'on veut plus de précision, un décalage en phase " $\Delta\phi$ " entre le paquet d'ions de référence et le paquet des ions dont on veut mesurer l'écart en masse " Δm ". Dans l'hypothèse où les masses sont très voisines, l'observation des deux paquets sur un détecteur placé à un rayon et un azimut donnés, correspond pour chacun d'eux au **même nombre de tours**.

Dans ce cas, on peut écrire :

$$\Delta\phi / \phi = \Delta m / m$$

formule dans laquelle " m " désigne la masse de l'ion de référence, et " ϕ " l'écart en phase correspondant à la durée de l'accélération. Ce qui nécessite de connaître le nombre de tours effectués, opération qui n'est pas toujours possible.

On peut s'affranchir de la mesure de ϕ en opérant une petite variation " ΔB " du champ principal " B ", qui dans la pratique peut être effectuée avec une précision acceptable, de manière à amener le paquet d'ions à mesurer à la phase occupée initialement par le paquet d'ions de référence. Il n'est pas nécessaire de retoucher les bobines de correction, ce qui est théoriquement requis, car cela apporterait une certaine confusion dans l'appréciation pratique de " ΔB ".

Dans ce cas :

$$\Delta B / B = \Delta m / m$$

L'erreur faite sur la mesure de $\Delta\phi$ ou de ΔB peut être relativement importante, mais comme il s'agit d'une mesure différentielle, la mesure de la masse totale reste très précise.

Il faut se rappeler que l'une des conditions les plus importantes pour atteindre une bonne précision est de disposer d'un faisceau dont la largeur en phase est la plus étroite possible.

3. Conception et réalisation d'un cyclotron.

3.1. problème posé.

La décision de construction d'un cyclotron résulte toujours d'une demande exprimée par des utilisateurs ayant un programme assez précis. Le choix pourra se porter le cas échéant sur un modèle existant qui correspond aux besoins, ou à défaut sur un prototype qu'il faudra d'abord étudier, puis construire. Nous nous placerons dans cette deuxième hypothèse.

Un examen préalable devra établir le bien-fondé de construire un cyclotron plutôt qu'un accélérateur d'un autre type. On examinera les aspects fondamentaux suivants : gamme d'ions, d'énergie, intensités. Les qualités de faisceau, la souplesse d'utilisation, la fiabilité sont aussi des éléments de choix. Le coût de l'installation initiale et de son fonctionnement interviennent également.

3.2. Options technologiques.

Nous examinerons successivement les différents choix que l'on peut faire dans le domaine des principaux constituants d'un cyclotron.

3.2.1. Champ magnétique.

Il existe deux grandes options : les circuits magnétiques non saturés, excités par des bobinages classiques, capables produire des champs allant jusqu'à 2 Teslas environ, et les circuits saturés servant à la fois de support mécanique et d'appoint de champ à des bobines supraconductrices, ce qui permet d'atteindre un champ total d'au moins 5 Teslas. Comme l'énergie d'un faisceau au rayon d'extraction est, grosso modo, proportionnelle au carré du champ, on voit tout l'intérêt de faire appel aux champs élevés pour minimiser les dimensions d'un cyclotron. La consommation électrique est très faible dans le cas de bobines supraconductrices, elle provient essentiellement du fonctionnement des cryo-générateurs.

Néanmoins on se rappellera que plus le champ est élevé, plus les orbites d'un cyclotron sont rapprochées les unes des autres, pour une même tension accélératrice. L'adoption de champs magnétiques élevés augmente la difficulté des processus d'injection et d'extraction.

Les formes et l'encombrement des systèmes accélérateurs des cyclotrons ne permettent pas de recourir à la cryogénie. Des prototypes de résonateurs supraconducteurs ont été construits pour l'accélérateur *Tritron* de l'université de Garching, mais cette expérience est restée sans suite. En conséquence, en ce qui concerne les dispositifs d'injection et d'extraction, la faible séparation des orbites des cyclotrons à champ magnétique très élevé impose des contraintes sévères au niveau de la conception des équipements électrostatiques et de ceux des équipements magnétiques qui ne peuvent pas bénéficier des performances accrues apportées par la cryogénie.

3.2.2. Système accélérateur.

Schématiquement, les systèmes accélérateurs modernes se composent d'un générateur de fréquence très stable, d'une chaîne d'amplification, d'un résonateur à grand coefficient de surtension, et d'électrodes destinées à créer le champ accélérateur qui sont, en fait, partie intégrante du résonateur. Des asservissements sont nécessaires pour maintenir l'accord des résonateurs et le niveau de tension pendant le fonctionnement. Quelques ordres de grandeur permettront de situer le domaine technologique concerné :

- la gamme de fréquences est de l'ordre de l'octave pour un cyclotron donné à énergie variable. La compilation des caractéristiques des divers cyclotrons montre que les plus basses fréquences utilisées sont de l'ordre de 7 Mhz (pour les ions lourds) et les plus élevées de 50 Mhz (pour les protons). La stabilité en fréquence du générateur, piloté par quartz, est très au dessus du seuil nécessaire. On notera cependant que les systèmes HF des petits cyclotrons médicaux fonctionnent en auto-oscillateurs, ce qui nécessite d'asservir le champ magnétique à la fréquence HF.

- le rang d'harmonique HF, et donc aussi la fréquence HF, dépendent de plusieurs facteurs. Ce que l'on appelle le *temps de transit* dans un espace accélérateur correspond à la durée du parcours d'une particule pour traverser cet espace accélérateur. Cette durée doit être très inférieure à la période HF, car un temps de transit important entraîne automatiquement une diminution du gain d'énergie. A la limite, en effet, pour un temps de transit égal à une période HF, il n'y a pas d'accélération. Le temps de transit est très important au centre des cyclotrons compacts, car on ne peut pas resserrer l'espace accélérateur autant qu'on le souhaiterait, sans risquer de compromettre la tenue en tension. De ce fait, peu de cyclotrons compacts utilisent des harmoniques HF supérieurs à 6, tandis que les cyclotrons à secteurs séparés, caractérisés par un grand rayon d'injection, peuvent fonctionner avec des rangs d'harmonique supérieurs.

Le choix de la gamme de fréquence HF résulte aussi d'un compromis entre les deux contraintes suivantes. D'une part le volume du résonateur devient trop encombrant aux fréquences très basses (quelques Mhz) correspondant aux ions les plus lourds. D'autre part les fréquences très élevées, auxquelles correspondent des longueurs d'onde HF comparables à l'étendue radiale des espaces accélérateurs, entraînent un défaut d'uniformité radiale du champ électrique.

- les tensions crête sur les électrodes accélératrices vont de quelques dizaines de kV à plus de 500 kV. On peut stabiliser au mieux la tension à 10^{-4} près en valeur relative, mais la constante de temps reste évidemment assujettie au coefficient de surtension qui est de l'ordre de 10 000. Les zones de champ électrique élevé que sont les espaces accélérateurs (le champ peut atteindre 100 kV par centimètre) sont d'autre part le siège de micro-décharges continues, incontrôlables, ayant pour effet d'introduire un certain bruit sur l'accélération.

- les puissances installées vont de quelques dizaines de kW au MW. La puissance transférée au faisceau peut constituer une fraction non négligeable de la puissance installée.

- des causes extérieures peuvent entraîner des perturbations de la stabilité. Citons : les vibrations mécaniques (pompes à vide, vibration des circuits de refroidissement), les fluctuations

de la température de l'eau de refroidissement (une stabilité au dixième de degré à **long terme** est indispensable). Il est recommandé de minimiser ces causes de perturbation si l'on veut obtenir le fonctionnement optimum des asservissements, qui ont aussi leurs limites.

3.2.3. Sources d'ions.

Certains cyclotrons compacts, comme les petits cyclotrons médicaux, utilisent encore des sources internes du type P.I.G. (Philips Ionization Gauge, inventée par Penning en 1937), mais on emploie de plus en plus des sources extérieures (sources ECR, sources Multicusp) qui sont plus performantes, car elles ne sont pas sujettes aux contraintes d'encombrement. De plus, on détient la maîtrise de l'adaptation du faisceau injecté. En contrepartie, l'installation d'une source externe est onéreuse, car il faut prendre en compte la ligne de faisceau qui la relie au cyclotron.

Les sources externes sont portées à un certain potentiel, nécessaire à l'accélération des ions à acheminer vers la région centrale du cyclotron. Le faisceau à basse énergie provenant de la source est injecté, en général axialement, dans la région centrale du cyclotron.

Les sources externes de **protons** produisent des flux suffisamment élevés pour que l'on se permette de ne conserver qu'un faisceau de petite émittance après passage à travers un système de fentes. Le potentiel de la source atteint 800 kV pour le nouvel injecteur de PSI (Villigen, Suisse), et l'intensité injectée est de l'ordre de 20 milliampères. Il est indispensable de combattre les effets de charge d'espace en rendant le processus de mise sur orbite aussi bref que possible, d'où la nécessité de cette tension d'injection élevée.

Les sources externes d'**ions lourds** utilisées pour les cyclotrons peuvent être d'un modèle à filament, pour la production d'ions de faible masse. C'est le cas de la source Multicusp utilisée à AGOR. Cette source est d'un modèle développé à Louvain la Neuve, à TRIUMF, et à PSI, pour la production d'ions légers, mais de plus en plus les sources ECR (*Electron Cyclotron Resonance*) s'imposent pour la production d'ions multichargés dans toute la gamme des masses. Les sources ECR sont d'un emploi recommandé pour les cyclotrons, l'énergie du faisceau accéléré variant comme le carré de l'état de charge des ions.

Les effets de charge d'espace dans le processus de groupement et de mise sur orbite des faisceaux d'ions lourds doivent être pris en compte dès lors que les courants que l'on prévoit d'injecter dépassent quelques dizaines de microampères. GANIL a adopté un potentiel d'injection de 100 kV pour la production de faisceaux très intenses.

Les ions lourds existant pour la plupart sous forme solide, il est indispensable de faire passer les corps en phase vapeur pour pouvoir ensuite les ioniser. Les sources ECR se prêtent assez bien à la production d'ions lourds par introduction, dans la zone de plasma, de l'échantillon à vaporiser. Un chauffage additionnel de l'échantillon est également utilisé dans certains cas. On peut aussi utiliser un composé du corps que l'on veut ioniser, si ce composé est d'une manipulation et d'un emploi plus commode que le corps pur lui-même. On évitera cependant les composés halogénés.

La production d'**ions lourds radioactifs** est un sujet d'actualité. On peut obtenir un faisceau d'ions lourds radioactifs par le processus de fragmentation d'un faisceau d'ions stables, à

grande énergie, traversant une cible. La sélection des produits de fragmentation se fait, en fonction du but poursuivi, à l'aide d'un spectromètre, ou de dispositifs d'analyse plus élaborés.

Une autre méthode de production, complémentaire de la précédente, consiste à arrêter totalement un faisceau très intense d'ions stables dans une cible épaisse. Il se forme dans cette cible des atomes radioactifs qu'il faut extraire, ioniser dans une source, et ensuite accélérer. Il faut savoir que les flux produits sont faibles, 10 puissance 9 particules par seconde pour les ions radioactifs les plus abondants. En fait on extrait de la source un mélange d'ions stables relativement très abondants, et d'ions radioactifs dont les rapports *charge sur masse* peuvent être très voisins. D'où la grande difficulté d'isoler le corps radioactif que l'on veut conserver.

Mais la première difficulté, et non la moindre, réside dans l'extraction de la cible de production de certaines catégories d'atomes radioactifs. Seuls les gaz rares ne posent pas de problème particulier. Les autres gaz ont tendance à réagir chimiquement avec les matériaux de la cible et aussi avec les parois de l'enceinte à vide de la cible, où ils vont se fixer. Les ions métalliques ont tendance à se condenser sur les parois, difficulté qui s'ajoute à celle de l'extraction de la cible de corps qui ont une faible tension de vapeur. Ajoutons que cette extraction doit être aussi brève que possible, les périodes les plus courtes étant les plus intéressantes.

La physique de production d'ions radioactifs, la nécessité d'opérer une sélection, les faibles flux de particules mis en jeu, les contraintes particulières de radioprotection, ont une incidence importante sur la conception des installations et des équipements. La conduite des cyclotrons destinés à l'accélération de faisceaux d'ions radioactifs doit se faire sur de nouvelles bases.

3.2.4. Vide.

On peut se fixer quelques règles simples concernant les pressions maximales admissibles dans un cyclotron. Il faut tenir compte de deux sortes de paramètres.

D'abord, il faut que les champs électriques puissent être tenus, qu'il s'agisse de radiofréquence, ou de septum électrostatique. Une pression de 10^{-3} Pascal est vraiment un maximum. Il faut éviter de tester les équipements concernés si cette pression est dépassée, et si possible les mettre hors tension automatiquement sur une remontée de pression.

Ensuite, et c'est là le point principal, il faut éviter de perdre trop de particules en cours d'accélération par diffusion sur les molécules de gaz résiduel. Plusieurs paramètres interviennent : la nature de l'ion, son énergie, son état de charge, et bien sûr la durée de l'accélération. Donnons quelques ordres de grandeur pratiques pour un fonctionnement correct. Pour des protons : une pression de 10^{-4} Pascal, et pour des ions très lourds : 10^{-6} Pascal. **Il faut toujours penser à vérifier la pression lorsque l'on constate une mauvaise transmission dans un cyclotron, ou encore dans une ligne de faisceau.**

Les techniques permettant d'obtenir de très basses pressions dans les chambres à vide ont fait de grands progrès au cours des dernières décades.

Les pompes à diffusion d'huile ne sont plus utilisées sur les installations performantes, bien qu'elles permettent de descendre en pression à 10^{-5} Pascal et qu'elles soient économiques à l'achat

et en entretien. Leur défaut réside dans la pollution des parois des enceintes à vide, et des équipements fonctionnant sous vide : résonateurs HF, septum électrostatiques en particulier. L'huile qui diffuse hors de la pompe, en très faible quantité, chemine aussi très rapidement le long des lignes de faisceau et peut rendre totalement inutilisables des installations expérimentales utilisant des détecteurs à semi-conducteurs.

Les pompes turbomoléculaires ont remplacé avantageusement les pompes à diffusion, du moins en ce qui concerne la propreté des enceintes à vide. Tournant à grande vitesse, elles nécessitent une surveillance du point de vue entretien, et il faut veiller à ce que les paliers à huile, si c'est le cas, ne soient pas générateurs de pollution.

Si l'on se contente d'une pression de l'ordre de 10^{-6} Pascal, on fera appel à des pompes utilisant la détente de l'hélium en circuit fermé. On obtient ainsi une température de 20 degrés Kelvin. Tous les gaz résiduels, sauf l'hélium, sont piégés par condensation ou adsorption sur les parties froides recouvertes de charbon actif.

Les pompes à hélium liquide, qui sont les plus performantes, ne sont pas d'un emploi justifié sur les cyclotrons.

Enfin citons pour mémoire les pompes ioniques, plutôt réservées à de petites enceintes non polluées.

On se rappellera que des jauges de pression reliées à des systèmes automatiques simples, commandant des vannes d'isolement et le fonctionnement des pompes, constituent la meilleure protection des équipements en cas de remontée de pression accidentelle.

Les matériaux placés sous vide doivent être propres, l'emploi de joints métalliques est à recommander dans la mesure du possible, on évitera la technique des joints glissants pour les passages de commandes mobiles.

3.3. Etablissement d'un projet.

L'innovation en matière de cyclotron n'est plus à la mode, et le futur utilisateur de faisceaux se classant dans le domaine de ceux que peut produire un cyclotron sera bien avisé de consulter la liste des réalisations existantes dans laquelle il pourra fort probablement trouver un modèle satisfaisant ses désirs. Nous pensons en particulier aux futurs utilisateurs de cyclotrons à usage industriel ou médical, qui ne peuvent pas raisonnablement se doter des moyens nécessaires à l'étude et à la réalisation d'équipements d'une technologie aussi peu courante. Il est vivement recommandé de faire appel à l'industrie spécialisée dans ce domaine. De nombreux modèles de cyclotrons existent généralement sur catalogue.

Le cas des laboratoires de recherche dans le domaine de la physique est différent. Lorsque le besoin d'une nouvelle machine se fait sentir, la spécificité des demandes des futurs utilisateurs ne rentre généralement pas dans un cadre existant. Il faut alors envisager la réalisation d'un accélérateur original correspondant au programme de recherche prévu. La phase qui précède la construction proprement dite est celle de l'établissement du projet. Cette phase est capitale pour le

succès de l'opération, car elle détermine les caractéristiques précises et définitives de l'accélérateur. Il nous est donc apparu intéressant d'en distinguer les grandes lignes.

Le point auquel il faut aboutir est la publication d'un document assez bien détaillé, rassemblant à la fois les justifications scientifiques des demandes des utilisateurs, et la description technique de l'accélérateur convenant le mieux à la satisfaction de ces demandes. Les choix techniques doivent être discutés. Des renseignements précis doivent être fournis sur le coût estimé, la durée de construction, les moyens en personnel nécessaires.

La préparation d'un projet est donc une entreprise de longue durée. Elle suppose l'existence d'un consensus sur le programme scientifique envisagé, étendu éventuellement aux disciplines qui peuvent utiliser le faisceau non plus comme une finalité, mais comme un outil de recherche. C'est pourquoi il faut aussi penser aux applications industrielles et médicales.

La définition de l'accélérateur est le résultat d'un compromis entre les propositions avancées par les spécialistes appartenant aux différents domaines, théoriques et technologiques. La solution n'est jamais unique, à toutes les étapes des options doivent être prises qui engagent l'avenir du projet. Ces options doivent être discutées devant des audiences assez larges, qui ne se limitent pas aux spécialistes directement concernés, car des conséquences parfois inattendues peuvent résulter de certains choix. Il est bien rare que l'on puisse modifier un paramètre de quelque importance sans que cela n'entraîne des répercussions en cascade sur d'autres parties du projet, et il ne faudrait pas arriver à une situation de blocage. Il faut être très vigilant de ce point de vue. En outre, il ne faut jamais perdre de vue le fonctionnement futur. On s'efforcera de prendre en compte l'intérêt de concevoir un accélérateur d'une mise en oeuvre simple, et d'un entretien aisé. C'est toujours possible, mais encore faut-il y penser avant que des décisions irréversibles soient prises. Cet aspect est souvent considéré, à tort, comme secondaire.

L'établissement d'un projet est donc le résultat du travail d'une équipe d'ingénieurs et de techniciens spécialistes des différents domaines et ayant si possible une expérience acquise auprès d'autres accélérateurs. A ce propos, force est de constater que les domaines de spécialisation se font de plus en plus nombreux, ce qui rend la diffusion de l'information moins facile. Chacun doit donc faire un certain effort pour sortir à l'occasion de sa sphère d'activité coutumière, pour étendre ses connaissances dans des domaines voisins qui ne semblent pas à priori le concerner. Les stages pédagogiques, points de rencontre de spécialistes venant de divers horizons, la participation active à des conférences, les visites de laboratoires ayant des sujets d'intérêt communs sont des opportunités de progrès trop souvent sous-estimées.

Le calendrier de réalisation d'un accélérateur doit être basé sur des estimations inspirées de l'expérience. Toutes les rubriques doivent être représentées, et il faut prendre garde aux oublis. On se rappellera que les délais d'établissement des appels d'offres et des marchés sont toujours beaucoup plus longs qu'on ne le pense, et que ces opérations doivent dans certains cas être relancées. Il faut donc prévoir des marges suffisantes. L'établissement du calendrier, que l'on a parfois tendance à simplifier, doit être conduit avec autant de soin et de précision que possible. Ce

travail d'aspect parfois ingrat, mais combien utile, demande du temps et de l'application. L'évaluation des durées des opérations élémentaires que l'on appelle *tâches*, doit toujours faire l'objet d'une appréciation comparative avec les durées de réalisation concernant des matériels existants de même nature. Les *contraintes* réciproques doivent être analysées avec soin. Le *chemin critique*, c'est-à-dire l'ordre logique des opérations qui conduit au résultat final dans le meilleur temps, doit rester le guide. Le chemin critique n'est pas une notion immuable, et, en fonction des risques encourus, on est parfois amené à considérer certaines variantes plus réalistes. Le calendrier, il va de soi, doit recevoir l'approbation de tous les groupes d'étude et des représentants des futurs utilisateurs, et doit être soumis à leur examen à intervalles réguliers.

L'évaluation du coût du projet ne doit pas laisser dans l'ombre certains postes relatifs à l'environnement de l'accélérateur, comme par exemple les liaisons électriques et hydrauliques, et d'une manière générale les frais d'installation. L'échelonnement des dépenses (engagements de marchés d'une part et échelonnement des paiements correspondants d'autre part) se fera à partir des éléments d'information fournis par le calendrier de réalisation, et l'on tiendra compte aussi du coût des prestations de service des entreprises devant participer au montage. Pour les postes de fourniture importants il est conseillé de faire des préconsultations auprès des industriels afin de mieux cerner les prévisions.

Pour les projets importants, l'aide des laboratoires travaillant dans la même discipline devra être recherchée. Certaines opérations bien définies pourront être sous-traitées, et l'expérience confirme que la meilleure efficacité est obtenue à la condition de consentir à une délégation de responsabilité à haut niveau. Le personnel technique est en effet formé au travail en équipe, au sein de services organisés.

3.4. Radioprotection.

Nous n'aborderons ici que les problèmes pratiques auxquels on est confronté au cours de l'établissement d'un projet.

On mènera l'étude de la disposition de l'accélérateur et de ses aires expérimentales de pair avec celle des **protections passives** destinées à protéger l'environnement, **en toutes circonstances**, contre les radiations. C'est évidemment le flux neutronique qui impose les contraintes les plus difficiles à surmonter. A un flux de neutrons de 60 MeV, par exemple, correspond un facteur d'atténuation de 2 pour une épaisseur de béton de 20 centimètres.

Les normes à respecter font l'objet de dispositions légales bien connues des services de radioprotection des laboratoires de l'IN2P3 et du CEA.

La rédaction d'un *rapport provisoire de sûreté* doit être entreprise le plus tôt possible, car c'est une oeuvre d'envergure, et d'une importance capitale. L'autorisation de construire l'accélérateur ne pourra être accordée qu'après l'approbation des dispositions décrites en détail dans ce rapport, par la DSIN (Direction de la Sûreté des Installations Nucléaires) et par la DRIRE (Direction Régionale de l'Industrie, de la Recherche et de l'Environnement).

Le rapport de sûreté comporte divers chapitres décrivant :

- le site et l'environnement démographique de l'installation,
- les caractéristiques météorologiques locales,
- les spécifications concernant l'accélérateur : type d'ions, énergie et intensité maximale, flux correspondants de neutrons, importance des pertes en cours d'accélération, points d'arrêt du faisceau, etc...Des plans de l'installation doivent impérativement être joints,
- la nature et le contrôle des effluents,
- les protections passives,
- la surveillance des accès aux zones interdites sous faisceau,
- le matériel de surveillance radiologique,
- le contrôle dosimétrique du personnel,
- l'organisation et le fonctionnement du service de radio-protection et du service médical,
- les instructions de démantèlement.

Les modifications ultérieures de l'installation doivent toujours faire l'objet de demandes d'autorisation et le rapport de sûreté, qui constitue **la mémoire collective du laboratoire**, doit être régulièrement remis à jour.

3.5. Aide apportée par le calcul numérique.

Les accélérateurs modernes mettent en jeu des investissements très importants et leur réalisation nécessite de longs délais. Les utilisateurs sont devenus très exigeants sur la qualité des performances.

Toutes les assurances doivent donc être prises lors de l'établissement d'un projet, et ultérieurement au cours des différentes phases d'étude et de réalisation, pour éviter les défauts de conception. Il est essentiel de s'assurer au départ, en s'appuyant sur des calculs précis, que les performances pourront être tenues. Tout au long de la réalisation, il importe d'optimiser avec le plus grand soin la définition des composants avant d'en passer commande. L'examen détaillé des performances des composants après fabrication, tout particulièrement des circuits magnétiques, constitue une étape essentielle dans la réalisation d'un projet.

Toutes ces préoccupations, toutes ces tâches, se traduisent par des travaux de recherche, d'étude, de mesures, dans lesquels le calcul numérique se présente comme un outil indispensable. Mais il faut tout de même rappeler qu'en aucune façon le calcul numérique ne saurait remplacer l'esprit de créativité, d'analyse et de synthèse.

Les programmes universels de calcul, concernant la résistance d'ensembles mécaniques (comme par exemple ceux qui ont trait à la structure d'une chambre à vide), ou traitant de la diffusion thermique dans les matériaux, ou bien encore d'assistance à l'élaboration des plans de réalisation, sont d'un emploi courant dans les travaux de préparation d'un projet. Ces programmes ne sont pas spécifiques des accélérateurs, leur utilisation est universelle, et par conséquent ils n'appellent pas de remarques particulières.

Pour ce qui concerne le magnétisme, le calcul de résonateurs HF et la dynamique des particules, on utilise des programmes de calcul mis au point spécialement pour faciliter l'étude et la conception des accélérateurs. Nous allons en préciser la nature et les applications.

3.5.1. Magnétisme.

Les programmes de calcul d'aimants dans l'espace à trois dimensions sont maintenant opérationnels, après avoir été l'objet de mises au point successives durant les vingt dernières années. A titre d'exemple, il est possible de calculer actuellement avec une précision suffisante le champ magnétique d'un cyclotron à secteurs spiralés. Autrefois, il était nécessaire de passer par la phase intermédiaire de la construction d'une maquette et des mesures de champ correspondantes, pour affiner la forme du circuit magnétique définitif d'un cyclotron, ce qui n'allait d'ailleurs pas sans difficulté, les densités de courant dans les bobines d'une maquette devant être augmentées par un facteur égal à l'inverse du rapport de réduction d'échelle. Toutefois, le calcul d'un circuit magnétique ne rend pas superflues les mesures magnétiques que l'on effectue sur tout aimant après livraison. Bien au contraire, les mesures sont le seul moyen de déceler les défauts magnétiques éventuels dus à des causes diverses impossibles à prendre en compte au niveau du calcul : caractéristiques magnétiques réelles du fer, petits défauts de parallélisme d'entrefer provenant de la fabrication, position réelle des conducteurs, déformations élastiques par contraintes sous champ. De plus, les mesures permettent d'apprécier, et de compenser ultérieurement, les perturbations magnétiques résiduelles des éléments magnétiques d'injection et d'éjection, dont les dimensions réduites sont difficiles à prendre en compte au niveau du calcul du circuit général.

En ce qui concerne les mesures magnétiques, l'informatique apporte une aide indispensable en matière de saisie de données, de traitement du signal, d'archivage, d'exploitation des résultats.

D'autre part, la rédaction et la tenue à jour des programmes de calcul d'aimants à trois dimensions sont affaires de spécialistes. L'utilisation de ces programmes demande une certaine expérience, et les durées d'exécution peuvent dans certains cas se chiffrer en heures.

3.5.2. Résonateurs HF.

De même que les circuits magnétiques, les résonateurs HF sont des constituants ayant un prix de revient et des délais de fabrication importants. Des programmes existent, qui permettent de définir la géométrie convenant à la gamme de fréquence adoptée, aux champs accélérateurs prévus. Ces programmes peuvent aussi calculer les densités de courant, ce qui permet par itération d'éliminer les points chauds. Ces calculs ne dispensent pas de construire des maquettes à très faible niveau de puissance, donc peu onéreuses, qui servent à vérifier la gamme de fréquence, les modes parasites, et qui donnent aussi une indication du champ électrique. Notons en passant que les maquettes permettent aussi l'étude des systèmes d'accord asservis.

3.5.3. Dynamique des particules.

Dans les laboratoires mettant en oeuvre des cyclotrons de quelque importance, on peut trouver des bibliothèques de programmes dont la finalité est la simulation de la dynamique des particules. Nous proposons de classer ces programmes d'après leurs fonctions, comme suit :

- Calcul des paramètres généraux. Il s'agit de petits programmes adaptés aux configurations d'accélérateur utilisées, pour les calculs de fréquence, de grandeur de champ magnétique, en fonction du type de la particule choisie et de l'énergie finale souhaitée.
- Simulation de cartes de champ magnétique. A partir de fonctions analytiques, et moyennant l'utilisation de coefficients empiriques, il est possible de simuler avec une très bonne fidélité la configuration du magnétisme d'une pièce polaire dans son plan médian. La durée du calcul est extrêmement brève. Les cartes obtenues sont traduites sous forme de réseaux de points de mesure, à l'image de ce l'on obtient par des mesures réelles, ou, par les programmes de calcul d'aimants. L'intérêt de ces cartes au moment de la conception d'un cyclotron est de pouvoir, sans calcul de durée importante, faire varier les paramètres principaux : forme et dimension des secteurs, entrefer (qui joue sur l'étendue des champ de fuite). Ces cartes sont lisses et exemptes de défauts, mais n'étant pas isochrones, elles ne peuvent pas être utilisées à l'état brut.
- Isochronisme. Les programmes d'isochronisme calculent les orbites d'équilibre pour des rayons successifs et en déduisent les corrections de champ à appliquer pour obtenir la loi isochrone correspondant à une particule et une fréquence données.
 S'il s'agit d'une carte de champ mesurée, ou, ce qui revient au même, d'une carte calculée par un programme à trois dimensions, les corrections devront être réalisées par la modification des courants des bobines de correction. La conversion des corrections de champ en correction de courant nécessite la connaissance préalable de la relation champ/courant pour chacune des bobines de correction, relation dans laquelle intervient d'ailleurs l'influence sur le niveau général du champ à cause de la variation de perméabilité du fer. Les bases de données correspondantes seront donc établies préalablement, à partir de mesures, ou de calculs systématiques selon le cas. L'application des corrections se fait par un programme auxiliaire simple qui s'appuie sur ces bases de données. L'obtention d'un champ isochrone satisfaisant exige de répéter plusieurs fois l'ensemble du processus. S'il s'agit d'une carte de champ obtenue par simulation, l'application des corrections de champ se fera directement, par voie informatique, sans passer par l'intermédiaire des courants. Dans ce cas on obtiendra, par un processus itératif rapide, une carte de champ isochrone convenant parfaitement à l'étude de la dynamique des particules. L'intérêt des champs simulés est la souplesse dont on dispose pour changer de fréquence ou d'état de charge.
- Dynamique des particules. Les programmes de dynamique ont plusieurs applications. Ils servent essentiellement à vérifier le comportement du faisceau pour des configurations normales. Ils permettent aussi l'évaluation précise de configurations particulières telles que l'injection avec compression de phase, l'injection et l'éjection avec précession, le fonctionnement en présence de perturbations de champ, ou avec un résonateur en panne. Ces programmes servent aussi au calcul des dispositifs d'injection et d'éjection. Si l'on

est en possession d'un champ simulé ou calculé suffisamment fidèle, et de modèles de septum réalistes, on peut établir les caractéristiques définitives de ces dispositifs sans devoir attendre les mesures magnétiques finales.

Les programmes de dynamique existent sous plusieurs versions. Certains remplacent l'action des espaces accélérateurs par une impulsion d'énergie équivalente. D'autres utilisent des cartes de champ analytiques pour représenter les champs électriques. Le calcul de la matrice de transfert au premier ordre en condition d'accélération est également une des possibilités offertes, très commode pour l'étude intrinsèque, c'est-à-dire abstraction faite des aberrations, de diverses configurations, telles que la compression de phase, la précession, le défaut d'isochronisme.

4. Différentes classes de cyclotrons.

Nous nous proposons de faire une classification générale des cyclotrons existants, et pour le détail, le lecteur pourra se référer aux catalogues publiés en annexe des compte-rendus des conférences internationales. Le classement que nous proposons est bien sûr arbitraire.

4.1. Les grands cyclotrons.

Les deux cyclotrons les plus puissants sont celui du Paul Scherrer Institute, en abrégé PSI (anciennement SIN), à Villigen, près de Zürich (Suisse), et celui de TRIUMF à Vancouver (British Columbia, Canada).

Les puissances considérables transportées par le faisceau sont nécessaires pour la production de faisceaux secondaires de pions suffisamment abondants.

Le cyclotron à 8 secteurs séparés de PSI produit des protons à énergie fixe de 590 MeV avec une intensité de l'ordre du milliampère, soit 590 kW de puissance faisceau. Une puissance aussi considérable exige un rendement d'extraction supérieur à 99.9 pour cent, pour éviter d'activer ou même de détruire les équipements d'extraction. Une telle performance est rendue possible par le grand gain en énergie des 4 cavités HF (plus de 500 kV par gap) et l'utilisation d'électrodes de flat-topping. Ce cyclotron à secteurs séparés est équipé d'un cyclotron injecteur de 72 MeV, qui est lui aussi à secteurs séparés. Le faisceau provient d'une plate-forme et il est injecté à 870 keV, axialement, dans ce cyclotron de 72 MeV.

Le cyclotron de Vancouver a des performances semblables : énergie maximale 520 MeV, courant faisceau de plus d'une centaine de microampères. Les ions accélérés sont des H⁻, ce qui permet d'adopter un processus d'extraction particulièrement simple et efficace : on utilise pour cela une feuille d'épluchage, d'ailleurs mobile radialement, ce qui permet de faire varier l'énergie du faisceau extrait. L'avantage de l'accélération des ions hydrogène négatifs est contrebalancé par l'obligation de n'utiliser que des champs magnétiques faibles : 0.4 Tesla à Vancouver. La liaison de l'électron à l'atome d'hydrogène est en effet rompue si l'accélération radiale dans le champ magnétique est trop élevée. Le rayon d'extraction du cyclotron de Vancouver est donc très grand : 7.80 mètres. Il n'existe qu'une seule bobine circulaire pour l'induction du champ principal, et les 6 vallées sont dépourvues de fer. Paradoxalement, ce cyclotron est du type *compact*. L'injection axiale à l'énergie de 300 keV se fait à l'aide d'un inflecteur spirale du type Pabot-Belmont. Le résonateur, assez original, comporte aussi un dispositif de flat-topping.

Des études très poussées ont été faites pour chacun de ces deux cyclotrons en vue de leur adjoindre un post-accélérateur du type cyclotron à secteurs séparés. Ces projets ont été abandonnés, principalement à cause de la difficulté d'extraction du faisceau à très haute énergie, la séparation des tours devenant insuffisante à cause de l'augmentation rapide du facteur " γ ". Le seul

post-accélérateur possible reste le synchrotron, mais il faut pouvoir l'adapter efficacement au faisceau continu du cyclotron, problème qui n'a pas encore reçu de solution totalement satisfaisante au niveau des études.

4.2. Les cyclotrons à ions lourds et énergie variable.

Si l'on excepte quelques programmes d'expériences à très haute énergie, la physique des ions lourds ne fait pas appel à des énergies très élevées : quelques dizaines de MeV par nucléon suffisent pour la plupart des expériences. Des courants de l'ordre du microampère électrique satisfont la majorité des demandes.

La production d'ions lourds totalement épluchés présente un grand intérêt dans différents domaines de la physique. L'épluchage total des ions les plus lourds exige une énergie de quelques centaines de MeV par nucléon, mais ce niveau d'énergie est beaucoup trop élevé pour convenir aux expériences. Il faudrait donc décélérer les ions après épluchage, et pouvoir s'accomoder du grossissement de l'émittance lié à la décélération, ce qui n'est pas du tout évident. Quoiqu'il en soit, les hautes énergies nécessaires à l'épluchage total des ions très lourds sont hors de portée des cyclotrons, elles ne peuvent être atteintes que par des synchrotrons. Le synchrotron SIS, à Darmstadt, peut fonctionner en ions très lourd au dessus du GeV par nucléon, et l'anneau de stockage ESR qui lui est associé permettra d'accumuler les ions épluchés avant de les renvoyer pour décélération dans le synchrotron.

L'utilisation de courants intenses d'ions lourds (jusqu'à l'Argon) est envisagée pour la production de particules radioactives par réaction de spallation dans une cible épaisse qui arrête le faisceau incident.

Les accélérateurs mettant en oeuvre des cyclotrons à ions lourds se répartissent en deux classes distinctes.

4.2.1. Citons d'abord les accélérateurs comportant essentiellement deux cyclotrons (ou plus) en cascade, avec épluchage intermédiaire des ions. Pour ces installations performantes, la technique classique de construction prévaut (pas de cryogénie). L'étage amont n'est d'ailleurs pas nécessairement un cyclotron. L'épluchage d'un ion lourd est caractérisé par la production d'une multitude d'états de charges différents, ce qui entraîne pour l'étage aval une perte de particules pouvant atteindre 90 pour cent dans le cas des ions les plus lourds. Parmi les premières installations, on peut citer ALICE, qui était composée d'un accélérateur linéaire injecteur et d'un cyclotron. Actuellement, sont en fonctionnement : VICKSI (Berlin), SARA, GANIL, l'accélérateur de RIKEN (Tokyo), HIFRL à Lanzhou (Chine).

4.2.2. Les cyclotrons à ions lourds fonctionnant isolément constituent l'autre classe, et ils seraient probablement restés d'un intérêt moindre si deux faits nouveaux n'étaient venus revaloriser leur concept : l'augmentation du champ magnétique réalisée par l'installation de bobines supraconductrices d'une part, et l'apparition de sources d'ions lourds à états de charge élevés (sources ECR) d'autre part.

Bien que l'idée de construire des cyclotrons à bobines supraconductrices soit ancienne, il a fallu attendre que des progrès décisifs soient faits dans la technologie de fabrication des supraconducteurs pour que des réalisations soient entreprises. La construction du cyclotron à bobines principales supraconductrices de Chalk River (Canada) a été lancée vers 1974, et elle a été suivie de près par celle des deux cyclotrons du même type actuellement en service à MSU (Michigan), le "K 500", et le "K 1200", ex "K 800". L'avènement ultérieur de sources ECR opérationnelles a considérablement revalorisé le principe de l'accélérateur unique, au prix, il est vrai, de problèmes à résoudre pour réaliser une injection axiale efficace. Parmi les autres réalisations, citons les cyclotrons de Texas A & M, le cyclotron AGOR, construit à Orsay avec la collaboration du personnel du K.V.I. de Groningen (Pays Bas), et installé maintenant dans ce dernier laboratoire. Le cyclotron de Catane, dont l'aimant a été construit à Milan, est en service depuis 1994. L'injection à haute énergie se fait radialement, et par épluchage, à partir d'un faisceau provenant d'un tandem. Une injection axiale est à l'étude.

Les gros cyclotrons à bobines classiques de JINR à Dubna (Russie) ont un diamètre d'extraction de 400 centimètres. Ce sont le U-400 et sa version plus récente U-400M. Ils ont été conçus pour être utilisés avec une source interne PIG, caractérisée par des états de charge modérés, ce qui explique leur diamètre important. L'installation d'une source ECR avec injection axiale est envisagée sur le U-400M, dont les caractéristiques en énergie se trouveront ainsi améliorées.

4.3. Les cyclotrons à ions légers et énergie moyenne.

Il s'agit de cyclotrons qui par eux-mêmes fonctionnent dans un domaine d'énergie déjà largement exploité en physique nucléaire. Deux d'entre eux ont trouvé une application comme injecteur dans un anneau d'accélération et de stockage. Il s'agit de l'accélérateur d'Indiana, et du récent accélérateur de 400 MeV d'Osaka (Japon). Le cyclotron à secteurs séparés de 200 MeV du NAC (Faure, Afrique du Sud) est à usage pluridisciplinaire.

4.4. Les cyclotrons pour la physique de la matière condensée, pour les applications médicales ou industrielles.

Des cyclotrons autrefois utilisés en physique nucléaire ont trouvé un regain d'activité dans ces différents domaines. Ce sont pour la plupart des cyclotrons d'une énergie de quelques dizaines de MeV par nucléon, comme par exemple le cyclotron VEC du Rutherford Laboratory qui sert à l'étude des dommages créés dans les matériaux par bombardement neutronique.

On peut citer aussi le cas particulier du synchrocyclotron d'Orsay dont le faisceau de protons de 220 MeV est bien adapté au traitement des tumeurs par irradiation, le *pic de Bragg* se situant à environ une dizaine de centimètres. La production du radioélément Iode 123, utilisé pour la détection de certaines tumeurs, nécessite un faisceau de l'ordre de 60 MeV protons que peuvent fournir des cyclotrons d'énergie moyenne.

Cependant le coût élevé des gros cyclotrons, l'importance croissante des recherches dans le

domaine de la matière condensée, le sens de l'évolution des recherches médicales et des recherches appliquées ont confirmé le bien-fondé de limiter le domaine d'énergie des nouveaux cyclotrons aux environs de 40 MeV protons. Le cyclotron d'Orléans peut être considéré comme le précurseur de cette tendance, et il a été suivi quelques années après par l'installation à Ispra (Italie) d'un cyclotron destiné principalement à l'étude des dommages dans les matériaux. A noter que ces énergies permettent aussi de produire des faisceaux de neutrons pour le traitement médical des tumeurs.

Les applications médicales se tournent depuis un certain temps vers la production de radio-éléments légers, émetteurs de positrons, à période courte, c'est-à-dire de quelques minutes seulement (isotopes du Carbone, de l'Azote, de l'Oxygène) que l'on substitue à leurs homologues stables dans la composition de molécules comme le glucose, qui sont assimilables par les organismes vivants. Après introduction de ces molécules directement assimilables et radioactives dans l'organisme du sujet à examiner, on étudie à l'aide d'une *caméra à positrons* le processus de leur métabolisme, sans suite préjudiciable pour le sujet soumis à examen, la durée de vie des éléments radioactifs étant courte. La localisation d'anomalies éventuelles, l'évolution du métabolisme sous l'effet d'influences extérieures sont autant de renseignements précieux, que ne peuvent pas fournir d'autres moyens d'examen, comme par exemple le scanner à résonance nucléaire.

Les cyclotrons nécessaires à la production de ces radio-éléments sont de petite taille : $K = 20$ environ, et les particules accélérées sont des protons ou des deutons. Les constructeurs industriels de cette classe de cyclotrons sont nombreux, mais le marché reste limité à cause du coût très élevé de l'équipement d'exploitation.

Nous terminerons cette énumération en citant le cas très particulier d'un cyclotron expérimental ¹⁴ fonctionnant comme instrument d'analyse en masse, pour la détection directe du carbone 14. Ce cyclotron de très petite taille (le rayon d'extraction est de 10 centimètres), a été construit et essayé au Lawrence Berkeley Laboratory. Le pouvoir séparateur est de $6 \cdot 10^{-4}$.

4.5. Cyclotrons pour faisceaux radioactifs.

Le laboratoire du cyclotron de l'Université de Louvain la Neuve s'est lancé depuis quelques années dans la production de faisceaux d'ions légers radioactifs. Des atomes radioactifs sont produits par le bombardement sous vide d'une cible par le faisceau extrait d'un petit cyclotron ($K = 30$). Ces atomes gazeux sortent spontanément de la cible, et sont ensuite ionisés dans une source ECR. Les ions produits sont accélérés dans le cyclotron Cyclone ($K = 90$). Le faisceau accéléré est en fait constitué d'un mélange d'ions de rapports charge sur masse très voisins. Le cyclotron Cyclone doit donc assurer, en plus de sa fonction d'accélération, la fonction d'analyse en masse. La difficulté est augmentée par le fait que les ions radioactifs sont minoritaires par un facteur important.

Un projet similaire, SPIRAL, est en cours de réalisation à GANIL. Les ions radioactifs recherchés se trouvent dans le domaine allant jusqu'aux ions voisins de la masse 100, domaine que

l'on peut espérer atteindre en bombardant des cibles d'éléments lourds avec un faisceau intense d'ions légers produits par l'accélérateur actuel. L'une des difficultés du projet réside dans la production elle-même de ces ions radioactifs relativement lourds. Ce sont pour la plupart des éléments métalliques, obtenus sous la forme d'atomes difficiles à évaporer de la cible et qui de plus ont tendance à se condenser sur les parois de l'équipement de production avant même d'avoir pu être ionisés.

Des études de faisabilité sont faites à l'I.S.N. de Grenoble concernant l'accélération d'ions radioactifs produits par bombardement neutronique intense d'une cible placée au voisinage du coeur du réacteur de l'I.L.L.

4.6. Applications.

Nous venons d'évoquer quelques utilisations de faisceaux de cyclotrons dans les domaines de l'étude du comportement des matériaux sous radiation, et dans le domaine médical. Le terme d'*applications* n'est peut-être pas le mieux choisi, car le faisceau des cyclotrons peut aussi servir comme instrument pour la recherche fondamentale dans les domaines autres que ceux de la physique nucléaire ou de la physique de la matière condensée. Mais le terme d'applications est consacré par l'usage et, il est vrai aussi, certaines utilisations ont un caractère purement industriel.

On pourra se référer aux compte-rendus des conférences internationales pour plus de détail. Citons de manière générale :

- la fabrication de membranes microporeuses pour l'ultrafiltration (purification bactériologique des liquides, masques respiratoires pour la filtration d'aérosols radioactifs).
- simulation de l'environnement spatial, pour le test des circuits de microélectronique destinés à l'astronautique.
- traitements de surface divers.

Les cyclotrons sont bien sûr en compétition avec les autres types d'accélérateur dans ces applications.

5. Conduite des cyclotrons.

Il est bien évident qu'un cyclotron de petites dimensions et travaillant isolément, comme par exemple un cyclotron médical, ne se conduit pas avec des moyens aussi sophistiqués que les grandes installations. C'est principalement à ces dernières que se rapportent les développements qui suivent.

5.1. Calcul et affichage des paramètres.

Nous nous placerons dans le cas de cyclotrons à énergie variable.

Le calcul des paramètres de base est assez simple. Le choix de l'ion et de l'énergie finale étant fait, le facteur relativiste au rayon d'extraction et la fréquence HF sont déterminés. Dans le calcul du champ magnétique de base, il y aurait lieu de tenir compte de la masse exacte de l'ion (masse atomique du noyau augmentée de celle des électrons résiduels). De fait, le champ magnétique devra de toutes façons être ajusté au moment de la mise en fonction pour parfaire l'isochronisme, et l'on ne recherchera donc pas une extrême précision dans les calculs.

Le cas des cyclotrons couplés est à peine plus compliqué, il faut prendre en compte, le cas échéant, le rapport d'épluchage. Des programmes de calcul très simples existent, qui comportent des butées sur les valeurs extrêmes admissibles pour la fréquence HF et le champ magnétique.

Connaissant les valeurs de base, on peut procéder alors à la mise aux valeurs de fonctionnement des équipements. Il est nécessaire pour cela de faire appel aux bases de données correspondantes. Ces bases de données permettent le calcul des courants et des tensions à appliquer aux équipements. La mise aux valeurs des éléments se fait maintenant par programme, pour les cyclotrons comme pour les lignes de faisceau, ce qui représente un gain de temps considérable pour les installations importantes. Les champs magnétiques du cyclotron (ou des cyclotrons) et des dipôles des lignes de faisceau doivent faire l'objet d'un traitement soigné, à cause du phénomène d'hystérésis. Le contrôle final du réglage doit se faire si possible en utilisant des sondes à résonance nucléaire.

La mise aux valeurs des équipements HF ne pose pas de problème particulier, la fréquence étant obtenue à partir de générateurs d'une stabilité très au dessus du seuil nécessaire. La montée en tension, progressive, doit si possible être programmée. Cependant, la valeur absolue des tensions HF ne peut pas être connue avec précision, car leur mesure est faite à partir d'un coupleur capacitif, par nature d'une fiabilité très moyenne.

Le coupleur capacitif est l'élément de tête d'un diviseur de tension, il est constitué d'une électrode plane placée en regard de l'électrode HF à contrôler, à une distance suffisante pour éviter les décharges. Mais cette distance peut varier, légèrement, en fonction du temps. De par leur

structure en porte-à-faux, les électrodes accélératrices sont en effet sujettes à de petites variations de position provoquées par des causes diverses : déformations lentes dues aux dérives thermiques du circuit de refroidissement, vibrations mécaniques pouvant provenir du milieu extérieur (pompes à vide) ou bien encore de la circulation turbulente de l'eau de refroidissement.

Les indications provenant du capteur capacitif ne sont donc pas complètement fiables. Et ce type de capteur est le seul dont on puisse disposer pour mesurer la tension. Dans ces conditions, les seules actions que l'on puisse entreprendre sont de minimiser les causes de perturbation.

On notera d'autre part que la connaissance de la valeur exacte des tensions accélératrices n'est pas très importante en soi, ce qui compte essentiellement pour le bon fonctionnement d'un cyclotron, c'est que ces tensions demeurent très stables. A court terme, on sait assurer une stabilité de l'ordre de 10^{-4} . A long terme, aucune action n'est possible au niveau des asservissements.

Le maintien de la stabilité des phases pose moins de problèmes, les dérives thermiques n'affectant pas les capteurs correspondants.

Enfin on notera que les asservissements ne sont pas en mesure de compenser les effets des micro-décharges qui se produisent en permanence dans les zones de champ fort.

5.2. Réglage initial du faisceau.

Les paramètres de fonctionnement ayant été affichés et vérifiés, le faisceau provenant de la source d'ions peut être introduit dans l'accélérateur. L'expérience montre que de petits ajustements sont toujours nécessaires. Nous ne pouvons donner ici que des indications générales.

La conduite dans les lignes de faisceau (ligne d'injection axiale, lignes reliant les étages accélérateurs entre eux) nécessite toujours une reprise des alignements transversaux. On procède par action sur les éléments dipolaires de guidage pour placer le faisceau sur l'axe optique. En ce qui concerne la focalisation, l'expérience montre qu'il n'y a pas lieu de modifier les réglages, s'il s'agit d'un faisceau qui a déjà été produit. Le réglage le plus délicat est celui du calage en phase des groupeurs, des regroupeurs, et celui de l'ajustement de leur tension. On se rappellera que le groupement longitudinal a une grande influence sur les caractéristiques du faisceau accéléré.

Pour un cyclotron fonctionnant isolément, la vérification de l'isochronisme, par observation de la phase du faisceau en fonction du rayon, est la seule opération notable, après le réglage de l'injection. Dans le cas où la source est externe, et où l'on utilise un groupeur, on vérifiera aussi la phase d'injection. Si l'on dispose d'un spectromètre situé sur la ligne de faisceau aval, des ajustements soignés des paramètres seront possibles. Le critère est la qualité de l'émittance en fin d'accélération, particulièrement dans le sens longitudinal (recherche de la dispersion d'énergie minimale).

Si un cyclotron est couplé à un autre cyclotron, il faudra procéder aux mêmes opérations après s'être assuré que les paquets d'ions provenant de l'étage amont se présentent à l'instant convenable à l'entrée de l'étage aval. Cette opération s'appelle *calage de la phase HF*. En effet, bien que les longueurs de ligne soient fixes, et que les signaux de pilotage de la radiofréquence

émanent d'un générateur commun, la synchronisation de deux étages d'accélération nécessite toujours un réajustement.

Donc, dans le cas d'accélérateurs couplés, l'ajustement des paramètres ne peut s'opérer que par étapes successives. Il est indispensable de disposer d'un faisceau bien réglé au niveau amont, à chaque étape de réglage, qu'il s'agisse d'une ligne de faisceau ou d'un étage accélérateur. On comprend que la mise au point d'un ensemble complexe demande beaucoup de soin et de temps. De plus, pour les installations destinées à la production de faisceaux intenses, la montée en puissance du faisceau ne doit être entreprise qu'après avoir procédé au réglage de l'ensemble de l'accélérateur avec un courant d'intensité modérée. La montée en puissance doit se faire de manière progressive pour éviter la détérioration éventuelle des équipements de guidage ou de mesure.

La durée des réglages sous faisceau a toujours fait l'objet de débats sans conclusions bien nettes. Nous allons essayer de dégager quelques idées sur ce sujet, en laissant à part les causes de retard dues aux pannes diverses, toujours fréquentes en période de réglage.

5.2.1. Précision de l'affichage des paramètres.

L'expérience montre que la précision obtenue effectivement dans l'affichage de certains paramètres importants n'est pas toujours suffisante.

Les champs magnétiques ne peuvent pas être affichés avec une précision supérieure à 10^{-5} . Pour un cyclotron accélérant sur plusieurs centaines de tours et sur un rang d'harmonique relativement élevé, cela correspond tout de même à une incertitude de l'ordre de plusieurs degrés sur la phase de sortie. Si ce cyclotron sert d'injecteur à un autre cyclotron, une action correctrice devient nécessaire.

Pour les hautes tensions, une précision d'affichage de 10^{-4} est possible, avec les réserves faites précédemment sur la fiabilité de la mesure par coupleur capacitif.

5.2.2. Valeurs réelles des paramètres.

Les valeurs réelles sont un peu différentes des valeurs affichées, par manque de précision ou de fidélité des capteurs.

Les hautes tensions ne peuvent pas faire l'objet de mesures directes. Les erreurs de lecture peuvent être importantes, du fait de l'imprécision des coupleurs capacitifs utilisés pour la mesure des amplitudes. Cependant des étalonnages expérimentaux sont possibles, et les erreurs systématiques observées peuvent être prises en compte dans les bases de données.

Le champ magnétique d'un cyclotron ne peut être mesuré qu'en quelques points seulement, qui ne sont pas représentatifs de la totalité du magnétisme des surfaces polaires. Dans ces conditions, s'il s'agit d'un **cyclotron à fer non saturé**, il semble difficile de reproduire avec toute la fidélité souhaitée la configuration d'un champ jugé satisfaisant lors d'un fonctionnement antérieur. L'hystérésis du fer n'est pas seulement un phénomène affectant globalement le circuit magnétique, il se manifeste aussi, à un moindre degré, de manière diverse en différents points de la surface des pôles. Les méthodes de cyclage préalable du champ magnétique donnent des résultats approximatifs pour deux raisons : d'une part on ne peut pas passer trop de temps sur l'opération de

cyclage, et d'autre part **on ne peut pas pousser le fer à saturation** parce que les bobines et les alimentations ne peuvent pas être économiquement prévues pour cela. Des imperfections locales du champ magnétique, imprévisibles et indécélables, subsistent toujours. A défaut d'information plus détaillée, on se résignera à maintenir l'isochronisme par une action globale, en modifiant le courant dans les bobines principales.

5.2.3. Evolution en fonction du temps.

La mise en condition thermique et magnétique d'un accélérateur que l'on vient de mettre en fonctionnement est une cause importante d'évolution des réglages. Nous évoquerons dans le paragraphe suivant les moyens de combattre les dérives des paramètres lors d'un fonctionnement de longue durée.

Tous les constituants d'un accélérateur évoluent rapidement pendant la période de démarrage, à commencer par la source d'ions, dont les caractéristiques fines d'émission sont si importantes pour la suite des réglages. Il est inutile de commencer les réglages si la source n'est pas encore stabilisée, ce qui peut prendre quelques heures pour des ions métalliques.

Les champs magnétiques des aimants volumineux évoluent sur des périodes de temps considérables. Six heures après cyclage, le champ peut varier (toujours dans le même sens) à un taux pouvant atteindre 10^{-5} par heure, et cela en pleine période de réglage. Ce fluage du champ est attribué aux courants de Foucault dans l'acier, à des phénomènes de magnétisme, et secondairement aux dilatations thermiques.

Comme nous l'avons évoqué au paragraphe 5.1, les tensions HF sont très sensibles aux variations de la température du fluide de refroidissement. De leur côté, les asservissements de compensation en fréquence d'accord ont des limites. Il est donc recommandé de ne procéder à des réglages définitifs que lorsque le circuit de réfrigération a acquis la stabilité nécessaire en température : **une stabilité du dixième de degré sur plusieurs heures est un impératif de bon fonctionnement.**

En conclusion, du seul point de vue des constantes de temps d'établissement des paramètres de fonctionnement, c'est en heures qu'il faut apprécier la durée nécessaire à l'obtention d'un premier faisceau suffisamment stable. Les grandes installations ne peuvent donc pas fonctionner avec une cadence journalière.

5.3. Maintien du faisceau.

Les expériences de physique nucléaire exigent que le faisceau reste aussi stable que possible pendant des heures, ou même des journées entières.

Les paramètres de réglage dérivent, essentiellement à cause de l'évolution thermique des équipements mécaniques et électroniques. La source d'ions évolue aussi par érosion lente des parties exposées au bombardement des électrons et des ions du plasma, ce qui nécessite de temps à autre des reprises de réglage. Lorsqu'il s'agit de produire des ions lourds à partir d'échantillons solides, la température de l'échantillon, et son usure, sont des paramètres en perpétuelle évolution.

Ces petits changements ont pour résultats des variations d'intensité, et aussi, ce qui est beaucoup plus grave, des modifications de l'émittance, que l'on ne sait pas maîtriser. L'expérience montre que **la stabilité du faisceau produit par la source d'ions est une condition essentielle de bon fonctionnement**. Nous mentionnerons aussi l'**usure des feuilles d'épluchage**, qui se traduit pas un accroissement important de la dispersion en énergie.

La difficulté que l'on rencontre, lorsque l'on détecte une évolution des caractéristiques du faisceau, est d'en trouver la cause précise. Il n'est matériellement pas possible de disposer d'équipements de diagnostic en nombre suffisant, et de toutes façons leur précision a des limites.

Les dérives sont donc compensées par des actions globales sur les paramètres les plus sensibles : champs magnétiques principaux, tensions HF, même si les dérives ne leur sont pas totalement imputables. A défaut de mieux, on cherche à maintenir dans une fourchette étroite les caractéristiques du faisceau, en tout premier lieu les **phases centrales** des paquets d'ions mesurées en différents points critiques.

Les interventions directes mises à part (source d'ions, feuille d'épluchage), les actions de maintien de la stabilité sont automatisées par des circuits analogiques de contre-réaction. Il faut éviter les interférences entre automatismes, et donc faire en sorte que leurs constantes de temps n'entrent pas en conflit. **L'incertitude sur l'origine des causes de dérive fait que la philosophie des asservissements est un débat qui reste ouvert.**

5.4. Changements d'énergie.

On peut distinguer trois sortes de changement d'énergie :

5.4.1. - les changements de faible amplitude, qui ne nécessitent pas de reprendre le réglage de l'ensemble de l'accélérateur. Un changement de l'ordre du pour cent reste possible par déplacement du septum d'extraction de l'étage d'accélération final, accompagné d'une reprise de la tension accélératrice. Il faut en effet s'efforcer d'extraire la même orbite, pour rester sensiblement dans les mêmes conditions de précession du faisceau, si l'on veut pas avoir à reprendre l'alignement du faisceau dans l'ensemble du système d'extraction.

5.4.2. - les changements d'énergie par ralentissement du faisceau après extraction.

Des changements d'énergie importants peuvent être obtenus, sans modification des réglages de l'accélérateur, par l'interposition d'une cible épaisse sur le faisceau extrait. Des diminutions d'énergie allant jusqu'à 50 pour cent sont possibles. Des précautions doivent néanmoins être prises. Il est pratiquement indispensable de *nettoyer* le faisceau en aval de la cible. Les qualités de l'émittance peuvent être rétablies si l'on dispose de jeux de fentes et d'un aimant monochromateur, mais cette opération se fait bien sûr au détriment de l'intensité. De plus, il n'est pas possible d'éliminer les produits de fragmentation du faisceau incident qui ont la même rigidité magnétique que le *faisceau ralenti*.

5.4.2. - les changements qui nécessitent une reprise des réglages.

Un changement d'énergie d'une certaine importance est simple dans son principe : il consiste

à afficher de nouveaux paramètres, ce qui d'ailleurs peut se faire par programme. Mais on retombe dans les difficultés rencontrées lors d'un démarrage, à ceci près que l'équilibre thermique des équipements et des circuits de refroidissement est conservé. La durée d'un nouveau réglage, qui se compte en heures sur une installation importante, est dissuasive dans le cas où des changements sont demandés à un rythme qui dépasse la demi-journée.

Mentionnons que l'I.S.N. de Grenoble envisage la possibilité d'extraire le faisceau de SARA à rayon variable. Dans cette nouvelle configuration, des changements rapides de l'énergie du faisceau extrait pourraient être effectués, car ils se feraient sans retoucher les réglages du cyclotron lui-même.

5.5. Equipements de diagnostic du faisceau.

On trouvera dans les compte-rendus des conférences internationales toutes les précisions recherchées sur ce sujet. Nous nous limiterons ici à une énumération de ces équipements.

5.5.1. Mesure des intensités.

Les **couppelles de Faraday** constituent le moyen le plus précis de mesure du courant du faisceau, à la condition toutefois qu'elles soient conçues de telle manière que l'émission d'électrons secondaires ne soit pas possible vers l'extérieur, car autrement la mesure serait faussée. Les coupelles de Faraday interceptent le faisceau et ne peuvent servir que pour des contrôles momentanés, ou bien encore pendant les périodes de réglage.

Les mesures du courant intercepté par des fentes de limitation d'émittance ne peuvent constituer que des indications relatives. L'émission d'électrons secondaires peut fausser les lectures par un facteur allant jusqu'à 4 ou 5.

Les **sondes internes** des cyclotrons sont utilisées pour les réglages, mais, de même que les coupelles de Faraday, elles bloquent le passage du faisceau pendant les mesures. Elles se déplacent radialement et sont normalement pourvues de *doigts différentiels* permettant de mesurer la densité radiale du faisceau et, approximativement, sa position axiale. Le *profil radial* du faisceau obtenu par déplacement des sondes est un élément d'information capital durant les réglages. On peut, à partir de l'observation du profil radial, évaluer l'importance de la précession du faisceau, affiner le calage de la phase HF.

Les sondes internes sont généralement situées dans des zones de champ magnétique intense. De ce fait les électrons émis par l'impact des ions retombent pour la plupart sur la sonde. Les lectures de courant sont assez fiables pour cette raison.

Les **transformateurs d'intensité**, disposés dans les voies de faisceau, ont la propriété très intéressante de ne pas intercepter le faisceau et apportent donc une aide importante à la surveillance du fonctionnement.

On ne peut plus les considérer comme fiables en dessous de la dizaine de nanoampères, et ils nécessitent un étalonnage. On peut augmenter momentanément la précision de leurs indications en modulant le faisceau à basse fréquence. Ils doivent être protégés contre les effets microphoniques, les vibrations.

Notons que les signaux provenant des équipements de mesure de phase ont une amplitude proportionnelle à l'intensité du faisceau, et cette propriété est utilisée accessoirement pour donner des indications approximatives d'intensité.

5.5.2. Mesure du profil transversal.

Des équipements permettent de mesurer le **profil transversal du faisceau** tout au long des lignes de faisceau. Les plus utilisés sont constitués d'un réseau de fils de tungstène très fins et parallèles. Chaque fil fournit un courant proportionnel à la densité du faisceau dans le sens transversal. Deux réseaux sont nécessaires : l'un pour le profil radial, et l'autre, disposé orthogonalement au premier, pour le profil axial. La présentation se fait sous forme analogique sur un oscilloscope. Les deux réseaux, placés sur un support commun amovible, interceptent une faible partie du faisceau : environ 4 pour cent. De nombreux équipements de mesure de profil peuvent donc être placés simultanément sur la trajectoire du faisceau. La sensibilité de ces équipements devient médiocre pour un courant total inférieur au nanoampère.

Il existe aussi des équipements de mesure de profil qui ne font pas obstacle au passage du faisceau. Ces équipements, d'une utilisation encore peu répandue, utilisent les émissions secondaires résultant de l'interaction du faisceau avec les gaz résiduels. Les ions de très basse énergie (0.03 eV environ), provenant de ces émissions sont accélérés par un champ électrique transversal et recueillis sur un réseau d'électrodes. Ce type de sonde peut, en plus, mesurer l'extension en phase des paquets d'ions par détection des électrons secondaires (2.0 eV).

Citons aussi des équipements à effet capacitif destinés à mesurer la **position transversale du centre de gravité** du faisceau, sans perte de particules. Destinés à la surveillance de l'alignement de l'axe du faisceau, ces équipements existent actuellement à l'état de prototypes.

5.5.3. Mesures dans le sens longitudinal.

Dans le sens longitudinal, qui est celui de la propagation du faisceau, on dispose de trois sortes d'équipement.

Les **sondes de phase capacitives** permettent de connaître la phase de passage du centre de gravité des paquets d'ions, sans intercepter le faisceau, et cela avec une assez bonne précision : plus ou moins 2 dixièmes de degré HF. Disposées dans les lignes de faisceau, elles permettent d'ajuster le réglage des phases des regroupeurs ou des résonateurs HF des cyclotrons. On notera que ce type de sonde n'est pas utilisable à très basse énergie, la longueur des électrodes étant grande vis à vis de la distance séparant les paquets d'ions successifs.

Pour le réglage de l'isochronisme dans un cyclotron, un réseau radial de sondes de phase fixes est considéré comme étant plus simple à utiliser, bien que moins précis, qu'une sonde de phase qui serait portée par un support mobile radialement. L'information recueillie par chaque sonde capacitive du réseau fixe représente la valeur moyenne des phases centrales des paquets d'ions passant entre ses électrodes. Des précautions doivent être prises lors de l'installation de la cablerie et de l'électronique pour que les signaux provenant des différentes sondes soient bien synchronisés. Des étalonnages sont nécessaires. Il est à noter que les signaux recueillis ne

correspondent pas à des mesures absolues opérées indépendamment les unes des autres, mais à des mesures relatives par rapport à un signal HF de référence commun. La détection des signaux se fait sur la composante du signal correspondant au double de la fréquence HF, pour s'affranchir des signaux HF toujours présents dans l'environnement. **La détermination de l'ensemble des phases se fait donc à 180 degrés HF près.**

Pour comprendre le bien-fondé de l'utilisation de l'harmonique 2, plutôt que la fréquence fondamentale, on se rappellera que le spectre du profil longitudinal d'un paquet d'ion, très étendu, comporte une importante composante sur cet harmonique, alors que l'ambiance HF, toujours présente à un niveau important, se présente sous la forme d'un signal sinusoïdal presque pur.

Les **sondes d'extension en phase** permettent la mesure de la longueur des paquets d'ions. Les sondes coaxiales, qui bloquent le passage du faisceau, sont utilisées sur les lignes de faisceau à des fins de réglage (regroupeurs). Leur temps de réponse est très court, et leur précision est suffisante pour un réglage courant. Les sondes qui sont mentionnées au paragraphe 5.5.2 peuvent également fonctionner sur les émissions d'électrons dues à l'impact du faisceau sur les gaz résiduels. Elles ont l'avantage de ne pas intercepter le faisceau, mais n'existent encore qu'à l'état de prototypes.

Les **sondes de mesure de la structure en temps** sont basées sur les méthodes utilisées en physique pour établir le profil longitudinal des impulsions de faisceau. Elles nécessitent l'introduction d'une cible épaisse sur le trajet du faisceau et l'utilisation d'une électronique élaborée mais cependant fiable. La mesure par échantillonnage est longue, mais d'une fidélité tout-à-fait remarquable.

5.5.4. Mesures d'énergie.

La mesure de l'**énergie** et de la **dispersion en énergie** se fait dans le plan focal d'un aimant d'analyse. L'énergie est reliée au champ magnétique de l'aimant, qui doit par conséquent être mesuré avec le maximum de précision possible, c'est-à-dire par sonde à résonance nucléaire. La mesure de l'énergie exige un réglage aussi soigné que possible de l'alignement de l'axe optique du faisceau incident. La mesure de la dispersion en énergie n'a de sens que si l'on respecte les conditions de focalisation au point objet.

5.5.5. Dénombrement des orbites.

Si l'on est capable de mesurer le temps de transit du faisceau à travers un cyclotron, on peut en déduire le nombre d'orbites, car la période de révolution est connue avec précision. Les prises de signaux doivent se faire à l'extérieur du cyclotron, car à l'intérieur, en fin d'accélération, les orbites peuvent se chevaucher, ce qui rend la mesure incertaine, ou même impossible. On utilise donc des capteurs capacitifs, qui n'interceptent pas le faisceau, et qui ont une bande passante de l'ordre du Mhz. La modulation naturelle de l'intensité du faisceau (de caractère aléatoire, avec des composantes dépassant même le Mhz) est le critère. On procède par échantillonnage, le signal d'entrée est différé jusqu'à obtenir sa corrélation avec le signal de sortie. Le traitement des échantillons se fait par analyse spectrale. La durée de la mesure est de l'ordre de quelques minutes,

et le résultat est fourni avec indication du taux de probabilité.

5.6. Assistance informatique en ligne et hors ligne.

Nous nous tiendrons à des généralités concernant ce vaste sujet.

Il est apparu évident au cours de l'évolution des cyclotrons, qui sont devenus des accélérateurs de plus en plus précis et sophistiqués, que l'opérateur humain ne suffisait plus à une exploitation diligente de ce type d'accélérateur. L'avènement des processus informatisés a apporté une aide considérable dans les différentes opérations suivantes rencontrées dans la mise en oeuvre d'un accélérateur :

- conservation en mémoire des paramètres généraux de l'accélérateur,
- calcul des paramètres pour une configuration donnée,
- mise en fonctionnement des composants lors des démarrages,
- transmission des ordres et des demandes d'information,
- compte-rendus d'exécution et fourniture des informations,
- activation d'un réseau d'alertes et d'alarmes,
- tenue d'un journal de bord,
- aide aux réglages sous forme de tâches *intelligentes*, permettant le dialogue.

La supervision par l'opérateur humain reste évidemment tout-à-fait nécessaire. Des situations imprévues peuvent se présenter dans le déroulement d'opérations programmées, et l'on n'entrevoit pas encore le moment où les cyclotrons deviendront ce que l'on appelle familièrement des machines *pousse-bouton* , mais on y tend.

6. Vocabulaire spécialisé.

- Bétatron.** Ce terme a désigné à l'origine un accélérateur d'électrons, destiné à produire un rayonnement *béta* artificiel. La mise au point de cet accélérateur a permis de prendre conscience des mécanismes régissant la stabilité des particules autour de la trajectoire centrale circulaire, de rayon constant par construction. Dans un accélérateur, toute particule voisine de la trajectoire centrale doit être soumise à une force de rappel transversale, car dans le cas contraire elle s'éloigne progressivement et finit par se perdre. La fréquence des oscillations qui résultent de cette force de rappel transversale, divisée par la fréquence de révolution d'une particule de référence de même énergie parcourant la trajectoire centrale, est un nombre appelé *nombre d'onde*. On parle d'*oscillation bétatron* pour désigner ce mouvement oscillatoire.
- Bump.** Terme anglais évocateur d'une secousse énergétique. Dans le but d'améliorer le rendement d'extraction, lorsque les orbites sont trop resserrées, on crée localement un défaut de champ, de polarité inverse de préférence, appelé *bump*. Ce processus n'est efficace que si le nombre d'onde radial "nu r" est voisin de 1, ce qui est le cas des cyclotrons compacts.
- Buncher.** Terme anglais se traduisant par groupeur ou par regroupeur. Le cyclotron étant un accélérateur cyclique, il convient que le faisceau de particules injectées soit constitué de paquets d'une dimension longitudinale aussi réduite que possible, pour minimiser les aberrations. Un groupeur a pour rôle de transformer le faisceau continu provenant d'une source d'ions en une suite de paquets d'ions aptes à être injectés, puis accélérés dans un cyclotron. Un regroupeur est utilisé lorsque l'on veut réduire la longueur des paquets d'ions provenant d'un cyclotron (ou d'un autre accélérateur cyclique), en vue de leur injection dans un autre cyclotron. Un **groupeur** est constitué d'un générateur HF, d'un résonateur à grand coefficient de surtension, et d'électrodes disposées de manière à produire un champ électrique alternatif aligné avec le sens de propagation d'un faisceau continu de particules monochromatiques. Une particule qui traverse les électrodes du groupeur au voisinage de l'instant où

le champ électrique s'annule reçoit une impulsion d'énergie, donc de vitesse, qui est proportionnelle à la valeur du champ à l'instant de la traversée des électrodes. Après un certain temps de parcours, appelé *distance de glissement*, on observe un groupement longitudinal des particules qui ont franchi les électrodes au voisinage de l'alternance favorable. Par alternance favorable on entend l'alternance qui ralentit les particules qui passent avant que le champ ne s'annule, et qui accélère les particules qui passent après.

On conçoit donc qu'un groupeur à tension sinusoïdale ait un rendement très inférieur à 50 pour cent. L'emploi d'un groupeur associé, fonctionnant sur un harmonique HF, permet d'améliorer la linéarité du phénomène, et donc le rendement.

Un **regroupeur** est techniquement semblable à un groupeur, et doit lui-aussi être suivi par un espace de glissement. Sa fonction est permettre de diminuer la longueur des paquets d'ions d'un faisceau cyclique.

Il est important de noter que le processus de groupement génère une dispersion en énergie. Un regroupement énergétique, c'est-à-dire sur une distance de glissement relativement courte, augmente la dispersion en énergie.

Dee.

C'est la désignation anglaise de la quatrième lettre de l'alphabet, qui sous sa forme majuscule évoque le contour des électrodes de 180 degrés d'ouverture des premiers cyclotrons.

Un *dé* peut être considéré comme une ligne quart d'onde, de forme aplatie, à l'intérieur de laquelle circule le faisceau. De part et d'autre de son extrémité (au sens radio-fréquence) il est bordé par des électrodes à *la masse* appelées *dummy-dees*, ou contre-dés. Les deux espaces séparant le dé des contre-dés sont des zones de champ HF et constituent les espaces accélérateurs ou *gaps*.

Il existe aussi des résonateurs à un seul intervalle accélérateur, appelés résonateurs *monogap*, qui conviennent à un fonctionnement à fréquence fixe et à tension relativement élevée (500 MV).

Edge focusing.

Focalisation par effet de bord. Considérons un groupe de particules traversant une zone de champ fortement inhomogène, ce qui est le cas des zones situées aux extrémités d'un dipole magnétique. Si la trajectoire de la particule centrale traversant cette zone n'est pas normale aux lignes d'égale intensité de champ, on constate que le groupe de particules subit une action de focalisation transversale dans un plan, et une action de défocalisation transversale dans l'autre plan.

Cet effet est à l'origine de la focalisation axiale réalisée dans les cyclotrons isochrones par l'alternance de régions à champ fort et à champ faible. Les orbites d'équilibre, parce qu'elles ne sont pas des cercles, traversent les zones de gradient de champ sous une incidence différente de la normale aux lignes d'égale

intensité de champ.

Il est couramment fait appel au principe de focalisation par effet de bord dans la conception des aimants dipolaires des lignes de faisceau et des spectromètres magnétiques. Voir en particulier les références 2 et 19.

Flutter. Ce terme évoque les alternances azimutales de l'intensité de l'induction magnétique, qui sont indispensables pour assurer la stabilité axiale des particules circulant dans un champ isochrone. On améliore l'effet de focalisation axiale du flutter en spiralant les pièces polaires.

Hard edge. Concept théorique relatif à un dipôle dont le champ magnétique s'arrêterait net aux extrémités. Lorsque l'on a affaire à un dipôle magnétique, la prise en compte du champ de fuite aux extrémités peut faire l'objet d'une hypothèse simplificatrice. On admet que l'entrefer est négligeable (*aimant à extrémités abruptes*), donc il n'y a plus de champ de fuite. On passe instantanément d'une zone de champ nul à une zone de champ établi et inversement. Dans les calculs de trajectoires *hard edge*, les effets d'extrémité sont représentés par une lentille mince de convergence équivalente. Le problème de la conformité du modèle de dipôle *hard edge* avec le dipôle réel qu'il est censé représenter réside dans l'évaluation de la longueur magnétique du dipôle *hard edge*, et de la convergence des lentilles d'extrémité.

Dans l'application du calcul *hard edge* aux aimants des cyclotrons à secteurs séparés les effets d'extrémité sont mal représentés car ils varient en fonction du rayon. On devra rester très prudent dans l'analyse des résultats de calcul des nombres d'onde par la méthode *hard edge*.

Rang d'harmonique. On appelle *rang d'harmonique* le rapport de la fréquence HF à la fréquence de rotation des particules.

La fréquence accélératrice d'un cyclotron ne doit pas obligatoirement s'identifier à la fréquence de rotation des particules. Elle peut aussi en être un multiple entier, pour des convenances de réalisation du système accélérateur, et c'est d'ailleurs le cas général. En aucun cas elle ne saurait être un sous-multiple.

Dans le cas où le système accélérateur comporte des *dees*, le concepteur veillera à choisir un rang d'harmonique assurant un gain en énergie acceptable. Se référer au formulaire.

Particularité : un *dee* de 180 degrés ne peut en aucun cas accélérer si l'harmonique est pair.

Lorsque les espaces accélérateurs sont pilotés indépendamment les uns des autres, ce qui est le cas des résonateurs *monogap*, il n'y a pas de contre-indication dans le choix du rang d'harmonique.

Momentum. Ce terme latin désigne la quantité de mouvement. On le traduit aussi par *moment*.

- Puller. Extracteur. On désigne ainsi toute électrode, placée devant une source d'ions, pour créer un champ accélérateur destiné à l'extraction des ions.
- Stripping Se traduit par *épluchage*. Si des atomes partiellement ionisés, ayant acquis une énergie suffisante, traversent une feuille mince, généralement de Carbone, ils perdront à nouveau des électrons, et verront donc leur état d'ionisation augmenter. Pour éplucher complètement des ions légers, des énergies de quelques MeV par nucléon sont suffisantes et les épaisseurs de feuille sont de l'ordre de la vingtaine de *microgrammes par centimètre carré* (cette unité d'épaisseur est consacrée par l'usage). Pour l'Uranium, une énergie de plusieurs centaines de MeV par nucléon est nécessaire pour avoir une probabilité importante d'ions épluchés, et l'épaisseur correspondante de la feuille d'épluchage est de plusieurs centaines de *microgrammes par centimètre carré*.
- Trim coils. Ce sont des bobines de correction de champ magnétique, dont le rôle est de permettre d'établir une loi de champ parfaitement isochrone, rôle essentiel dans le cas des cyclotrons à énergie variable.
- Ces bobines sont souvent de forme circulaire dans les cyclotrons compacts, mais elles peuvent aussi être bobinées sur les secteurs, comme c'est d'ailleurs nécessairement le cas pour les cyclotrons à secteurs séparés.
- Les bobinages par secteur peuvent être utilisés pour équilibrer les niveaux de champ de chaque secteur, pour compenser des défauts magnétiques locaux. Ce mode de bobinage présente donc une flexibilité d'emploi très supérieure à celle des bobines circulaires.

7. Formulaire.

Nous donnons ici quelques formules qui peuvent être utiles aux utilisateurs de cyclotrons. Nous n'abordons pas les problèmes plus complexes relatifs au calcul de trajectoires et d'enveloppes qui font l'objet de programmes de calculs appropriés.

7.1. Systèmes d'unités.

Il est toujours possible d'utiliser le système international d'unités. Dans ce système, la charge élémentaire vaut 1.602×10^{-19} coulomb, et l'unité de masse atomique 1.66×10^{-27} kilogramme approximativement.

Il est cependant plus pratique, et donc usuel, d'utiliser comme unité de charge électrique la charge élémentaire.

D'autre part, il est commode d'utiliser la nanoseconde comme unité de temps.

Nous proposons donc ici d'exprimer les grandeurs dans le système cohérent d'unités basé sur le mètre, la nanoseconde, la charge électrique élémentaire, le tesla et le radian.

Citons quelques unités dérivées de ce système :

Tension	gigavolt	GV
Champ électrique	gigavolt par mètre	GV/m
Fréquence	gigahertz	GHz
Vitesse	mètre par nanoseconde	m/ns
Quantité de mouvement	giga électron-volt par unité de vitesse	GeV/(m/ns)

Les valeurs des deux grandeurs physiques qui nous sont utiles sont les suivantes dans ce système :

-Vitesse de la lumière : $c = 0.2998 \dots (m / ns)$

-Unité de masse atomique : $amu = 0.9315 \dots (GeV)$

Nous rappellerons que l'unité de masse atomique correspond par définition au douzième de la masse au repos d'un **atome** de Carbone 12 et s'exprime, par convention, sous la forme de son équivalent en énergie :

$$amu = (masse \text{ de l'atome de } ^{12}\text{Carbone} / 12) * c^2$$

Rappelons que la masse de l'électron correspond à 0.000511 GeV .

7.2. Formules usuelles.

- Facteur relativiste " γ ".

$$\gamma = 1 / \text{Sqrt}(1 - \beta^2) , \text{ avec } \beta = v / c , \text{ et } v = \text{vitesse de la particule.}$$

"Sqrt" est la notation Fortran de la racine carrée.

Au repos, $\gamma = 1$.

On notera l'identité : $\gamma^2 = 1 + \beta^2 * \gamma^2$

- Energie cinétique.

$$E_c = E_0 * (\gamma - 1)$$

E_0 est l'énergie correspondant à la masse au repos.

- Charge d'un ion donné.

Dans le système d'unités adopté, la charge "q" portée par un ion donné s'exprime par le nombre entier "Q" égal au nombre d'électrons manquants. Ne pas confondre "Q" avec le numéro atomique "Z" du corps considéré. Pour un ion complètement épluché, $Q = Z$.

- Masse d'un ion donné.

La masse "m" de l'ion se calcule comme suit.

Soit "A" le nombre réel définissant la masse atomique du corps considéré ("A" est très voisin du nombre (entier) de nucléons constituant le noyau d'un corps isotopiquement pur) :

$$m = A * \text{amu} * \gamma / (c * c)$$

Si l'on veut être précis, on retranchera la masse totale des électrons manquants.

- Quantité de mouvement.

C'est un vecteur dont le module "p" est par définition égal au produit de la masse "m" par le module de la vitesse "v" :

$$p = m * v$$

On peut écrire l'identité : $m * v = E_0 * \beta * \gamma / c$

E_0 est l'énergie correspondant à la masse au repos.

Par commodité, on exprime souvent une quantité de mouvement en "GeV / c".

Si l'on connaît la valeur de la quantité de mouvement, exprimée selon la deuxième formule en "eV / c" ou en multiple de cette unité, et la valeur de " E_0 " exprimée en "eV" ou en multiple de cette unité, on en déduit la valeur du produit " $\beta * \gamma$ ". L'identité $\gamma^2 = 1 + \beta^2 * \gamma^2$ permet alors de calculer " γ " et donc l'énergie cinétique " E_c " par la formule $E_c = E_0 * (\gamma - 1)$.

- Rigidité magnétique.

Par définition : $B\rho = m * v / q$

Elle s'exprime dans le système international d'unités en Tesla * mètre.

- Fréquence de révolution d'une particule.

Il s'agit de la fréquence "Fp" d'une particule parcourant une orbite d'équilibre.

$$F_p = (q * B / m) / (2 * \pi)$$

- Défaut d'isochronisme.

La correction "dB" à apporter au champ moyen "B" d'une orbite d'équilibre donnée pour rattraper un écart "dFp" de la fréquence "Fp" est donnée par :

$$dB / B = \gamma^2 * (dF_p / F_p)$$

- Nombre d'onde radial.

Si l'on connaît la matrice de transfert "A_{ij}" de la *maille* d'une orbite d'équilibre donnée, matrice dans laquelle l'indice "i" correspond à la *position relative* transverse et l'indice "j" à la *pente relative* transverse, le nombre d'onde radial est donné par les formules suivantes :

$$\cos(\mu) = (A_{11} + A_{22}) / 2$$

$$\text{Nombre d'onde "nu r"} = N_{\text{maille}} * \mu / (2 * \pi)$$

"N_{maille}" désignant le nombre de mailles (identiques) dont est constituée l'orbite d'équilibre.

Nota : on peut aussi calculer "nu r" à partir de la matrice de transfert calculée pour un tour complet, et dans ce cas il faut déclarer N_{maille} = 1, mais on notera que la partie entière de "nu r" n'est pas définie, μ étant généralement supérieur à $2 * \pi$. Le doute n'est pas difficile à lever, car pour un cyclotron isochrone, cette partie entière ne dépasse jamais 1.

- Nombre d'onde axial.

La démarche est la même que pour le plan radial, mais on utilise les termes de la matrice axiale. La partie entière de "nu z" est dans la plupart des cas égale à zéro.

- Adaptation du faisceau.

Pour une injection axiale, voir référence 9.

Pour l'adaptation d'un faisceau injecté d'un cyclotron à secteurs séparés, voir référence 5.

- Energie cinétique en fonction du rayon moyen.

Pour un cyclotron isochrone, on utilisera la formule générale déjà citée :

$$E_c = E_0 * (\gamma - 1)$$

et dans l'expression de γ on prendra :

$$\beta = \omega * R_m / c$$

R_m étant le rayon moyen, et $\omega = 2 * \pi * F_p = q * B / m$, la vitesse angulaire de l'ion.

- Gain en énergie par tour.

Nous ne considérons ici que le cas d'une accélération par des *dees* comportant chacun deux espaces accélérateurs. Appelons "dEc" le gain d'énergie par tour et par nucléon. On a :

$$dEc = n * V_{max} * \cos(\phi) * \sin(h * \alpha / 2) * Q / A$$

avec n = nombre d'espaces accélérateurs sur un tour, soit 2 fois le nombre de dees.

V_{max} = tension dee maximale.

ϕ = phase de passage du paquet d'ions sur la médiatrice des deux espaces accélérateurs appartenant à un même dee. Pour un réglage normal, ϕ = zéro.

h = rang d'harmonique HF.

α = angle que font entre eux les deux intervalles accélérateurs d'un même dee.

Q = nombre d'électrons manquants.

A = nombre de nucléons.

Nota 1 : dans le système d'unités proposé, " V_{max} " s'exprime en GV et donc "dEc" s'énonce en *GeV par nucléon*.

Nota 2 : si " A " est le nombre (réel) exprimant la masse atomique du noyau, alors "dEc" correspond au gain en énergie par tour et par unité de masse atomique.

- Relations entre deux ions identiques d'énergies voisines.

D'une manière générale on a :

$$dp / p = dBp / Bp = (dv / v) * \gamma^2 = (dEc / Ec) * \gamma / (\gamma + 1)$$

p : quantité de mouvement.

Bp : rigidité magnétique.

v : vitesse.

Ec : énergie cinétique.

γ : facteur relativiste.

On a aussi l'identité : $dp = dEc / v$

- Séparation entre deux orbites d'équilibre voisines.

La définition générale de l'énergie cinétique donne, après différentiation :

$$dEc / Ec = d\gamma / (\gamma - 1)$$

soit : $dEc / Ec = (dv / v) * \gamma * (\gamma + 1)$ v : vitesse

Si le champ est isochrone, c'est-à-dire si la valeur moyenne de " ω " est constante, alors la formule $\omega = v / R_m$, dans laquelle " R_m " désigne le rayon moyen, conduit après différentiation à :

$$dE_c / E_c = (dR_m / R_m) * \gamma * (\gamma + 1)$$

d'où l'on peut tirer dR_m , si l'on connaît dE_c , R_m (et donc E_c).

Sous forme non relativiste ($\gamma = 1$), dans un champ isochrone :

$$dE_c / E_c = (dR_m / R_m) * 2$$

- Evolution de l'émittance au premier ordre en accélération.

Rappelons que le volume d'émittance ne varie pas en cours d'accélération si les coordonnées des particules sont exprimées sous forme de grandeurs canoniques. Cette propriété tient au fait que, dans ces circonstances, parmi les coefficients des équations différentielles du mouvement relatif, ceux qui entrent dans la formule de Liouville¹⁵ sont identiquement nuls.

On suppose dans ce qui suit que le plan axial est découplé du plan radial.

Dans le plan axial, dans lequel "z" est l'écart en position par rapport au plan médian, "z point" la vitesse relative axiale, "z prime" la pente de la trajectoire, "pz" la quantité de mouvement relative (produit de "z point" par la masse de la particule de référence) :

la surface "z, pz" ne varie pas

la surface "z, z point" varie comme l'inverse de " γ ".

la surface "z, z prime" varie comme l'inverse du produit " $\beta * \gamma$ ".

Dans le plan radial, nous adopterons les conventions suivantes : "x" est l'écart en position transversal, "x point" la vitesse relative transversale, "x prime" la pente de la trajectoire, "px" la quantité de mouvement relative transversale (produit de "x point" par la masse de la particule de référence), "delta l" l'écart relatif longitudinal, "delta phi" ce même écart mesuré en phase HF, "delta l point" la vitesse relative longitudinale, "delta p" la différence des quantités de mouvement longitudinales, "dEc" l'écart en énergie cinétique. Les grandeurs absolues "p" et "Ec" représentent respectivement la quantité de mouvement et l'énergie cinétique de la particule de référence.

Le volume d'émittance radiale, à quatre dimensions, évolue comme suit :

Le volume "x, x point, delta l, delta l point" varie comme l'inverse de " γ^4 ".

Le volume "x, x prime, delta l, delta p / p" varie comme l'inverse de " $\gamma^2 - 1$ ", expression d'ailleurs identique à " $\beta^2 * \gamma^2$ ".

Le volume "x, xprime, delta phi, dEc / Ec" varie comme l'inverse de " $v * \gamma * (\gamma - 1)$ ".

Le volume "x, px, delta l, delta p" ne varie pas (variables canoniques).

Le volume "x, px, delta phi, dEc" ne varie pas (variables canoniques).

Nota. Le passage des variables canoniques "delta l" et "delta p" aux variables canoniques "delta phi" et "dEc" s'opère en divisant "delta l", et en multipliant "delta p", par la vitesse absolue "v" de la particule de référence. L'écart en temps résultant de la division de "delta l" par "v" doit

être multiplié par le facteur constant " $2 * \pi * \text{Fréquence HF}$ " pour obtenir " $\Delta \phi$ ". Rappelons l'identité : $dE_c = v * \Delta p$.

Les lois précédentes sont générales et rigoureuses pour des ensembles de particules qui n'émettent pas de rayonnement. Elles ne sont pas spécifiques des cyclotrons isochrones.

Nous rappellerons que le mouvement transversal et le mouvement longitudinal sont couplés (radialement seulement selon nos hypothèses) en présence d'un champ magnétique. Ces deux mouvements sont alors indissociables. Observés en dehors du cyclotron, dans un espace de glissement, ces mouvements sont découplés.

D'une manière générale, entre l'entrée et la sortie d'un cyclotron (les mesures se faisant donc en dehors du champ magnétique), les surfaces d'émittance " $z, z \text{ prime}$ ", " $x, x \text{ prime}$ " et " $\Delta l, \Delta p / p$ " varient chacune comme l'inverse du produit " $\beta * \gamma$ ". Ces lois s'étendent à tous les types d'accélérateur, parce qu'elles sont l'application de la formule de Liouville.

En **valeur moyenne**, dans un cyclotron **isochrone**, avec un **gain d'énergie par tour constant**, les amplitudes maximales des coordonnées **relatives** suivent les lois suivantes pour les particules d'un **faisceau adapté** :

- les positions transversales " x " et " z " varient l'une et l'autre comme l'inverse de " γ ",

- les vitesses transversales ne varient pas,

- les quantités de mouvement transversales " p_x " et " p_z " varient comme " γ ",

- les pentes " $x \text{ prime}$ " et " $z \text{ prime}$ " varient comme l'inverse de " β ",

- la position longitudinale " Δl " varie comme " β " et l'écart en phase ne varie pas,

- la différence des modules des vitesses absolues varie comme l'inverse de " $\beta * \gamma^3$ ",

- la différence des modules des quantités de mouvement absolues " Δp " varie comme l'inverse de β ,

- le rapport " $\Delta p / p$ ", dans lequel " p " est la quantité de mouvement de la particule de référence, varie comme l'inverse de " $\beta^2 * \gamma$ ",

- l'écart en énergie cinétique " ΔE_c " ne varie pas,

- le rapport " $\Delta E_c / E_c$ ", E_c étant l'énergie cinétique de la particule de référence, varie comme l'inverse de " $\gamma - 1$ ".

Rappelons que tout ce qui précède est valable au premier ordre

- **Fonctionnement à "orbites constantes".**

Lorsque l'on change de type d'ion, d'énergie, on souhaite parfois conserver le même parcours pour les trajectoires, au moins localement, dans le but de simplifier les réglages et de respecter les positions des équipements d'injection, d'éjection. Notons que si l'énergie change, la loi radiale de champ se modifie en fonction du nouveau facteur " γ ", il n'est donc pas question de

retrouver exactement la même disposition d'ensemble des trajectoires.

Les lois de similitude sont simples. Il faut modifier :

- les champs magnétiques dans la proportion des rigidités magnétiques " $B\rho$ ",
- les champs électriques dans le rapport " $\omega * B\rho$ ".

8. Références et documentation.

Nous avons voulu limiter le nombre de références citées directement. Vous trouverez dans la liste présentée trois ouvrages importants, et quelques publications retenues soit pour leur généralité, soit parce qu'elles apportent des compléments utiles à la compréhension de l'exposé. Des références de caractère historique sont également fournies.

Ce chapitre est complété par la liste des compte-rendus des conférences internationales sur les cyclotrons. Ces compte-rendus constituent une source d'information considérable dans tous les domaines : études théoriques, réalisations, équipements, applications diverses.

Il existe aussi en bibliothèque des compte-rendus de conférences d'intérêt plus général. Parmi les conférences concernées, citons les principales :

- la conférence bisannuelle américaine sur les accélérateurs de particules, dont les compte-rendus sont généralement publiés par IEEE Transactions on Nuclear Science.
- la conférence européenne sur les accélérateurs EPAC, également bisannuelle.
- la conférence sur les accélérateurs de l'Europe de l'Est (langue : russe).

Certaines écoles d'accélérateurs publient régulièrement des compte-rendus (Kikuchi summer / winter School d'Osaka), mais la diffusion n'est pas généralisée.

Parmi les publications régulières comportant des sujets d'intérêt, on peut citer :

- Nuclear Instruments and methods. Editeur North-Holland, Amsterdam.
- Particle accelerators. Editeur Denis Keefe, Lawrence Berkeley Laboratory.

Enfin certains laboratoires de cyclotrons publient des rapports d'activité annuels.

La liste des références que nous avons retenues pour le présent cours est la suivante :

Ouvrages :

1. PARTICLE ACCELERATORS

Auteurs : M. Stanley Livingston et John P. Blewett.

Editeur : MCGRAW-HILL book company, 1962.

Commentaires : on trouvera des renseignements très utiles sur les débuts du cyclotron,

et sur l'optique corpusculaire. Mais le cyclotron isochrone n'est pas traité et l'on trouvera pages 187 à 191 un débat sur son avenir.

2. PRINCIPLES OF CYCLIC PARTICLE ACCELERATORS

Auteur : John J. Livingood.

Editeur : D. VAN NOSTRAND company, 1961.

Commentaires : les principes généraux de la dynamique des particules sont bien développés. Les caractéristiques des cyclotrons isochrones sont analysées en détail et les conclusions restent d'actualité.

La bibliographie est considérable.

3. ACCELERATEURS CIRCULAIRES DE PARTICULES

Auteur : Henri Bruck.

Editeur : Presses Universitaires de France, 1966.

Commentaires : ouvrage théorique de base, qui s'étend principalement sur les synchrotrons, mais très utile aussi pour ceux qui s'intéressent à la théorie des cyclotrons. Bibliographie importante.

Publications :

4. P. Lapostolle. "A propos de l'influence sur l'isochronisme d'espaces d'accélération à configuration spirale dans un cyclotron". Rapport CERN MSC-27/702 du 25 avril 1963.
5. J. Fermé. "Parameters of the eigenellipsoid for separated sector cyclotrons". Twelfth International Conference on Cyclotrons and their applications, Berlin, may 8-12 1989, pp 461 - 463.
Commentaires : cette publication complète le travail de G. Hinderer cité en référence. A noter vers le début du paragraphe 3 une inversion de termes. Il faut lire :
$$C_{14} = C_{32} \text{ et } C_{24} = -C_{31}.$$
6. R. W. Müller. "Novel inflectors for cyclic accelerators". Nuclear Instruments and Methods 54, 1967, p. 29.
7. J. L. Belmont, J. L. Pabot. "Study of axial injection for the Grenoble cyclotron". IEEE Transactions on Nuclear Science, August 1966, volume NS-13, number 4, pp 191 - 193.
8. C. Ricaud & al. "Preliminary design of a new high intensity injection system for Ganil". Twelfth International Conference on Cyclotrons and their applications, Berlin May 8 - 12, 1989, pp 372 - 375.
9. R. Beck & al. "Six dimensional beam matching for axial injection into a cyclotron". Même référence que précédemment, pp 432 - 434.
10. Werner Joho. "Application of the phase compression - phase expansion effect for isochronous storage rings". Particle Accelerators 1974, vol. 6, pp. 41 - 52.
11. W.M. Schulte and H.L. Hagedoorn. "the theory of accelerated particles in cyclotrons". Nuclear Instruments and Methods 171 (1980) pp. 409 - 437.

Mêmes auteurs. "Special application of a general orbit theory for accelerated particles in cyclotrons". Même référence, pp. 439 - 443.
 Commentaires : application du formalisme hamiltonien pour l'étude théorique du mouvement des particules dans un cyclotron.

12. P. Lapostolle. "Recent developments on beam dynamics in cyclotrons". Ninth Int. Conf. on Cyclotrons and their applications. Caen sept. 7 - 10 1981, pp. 317 - 326.
 Commentaires : ce document comporte aussi de nombreuses références utiles.
13. A. Chabert, G. Gendreau, P. Lapostolle and P. Yvon. "Bunch length compression inside a separated sector cyclotron and related problems". IEEE Transactions on Nuclear Science, Vol. NS - 28, n° 3, June 1981.
14. Kirk J. Bertsche. "Ion motion in a small low energy cyclotron". Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A 301 (1991) pp 171 - 181.

Quelques références historiques compléteront la liste précédente.

15. J. Liouville. "Note sur la théorie de la variation des constantes arbitraires". Journal de Mathématiques, tome III, Juillet 1838, pp. 342 - 349.
16. G. Ising. "Prinzip einer Methode zur Herstellung von Kanalstrahlen hoher Voltzahl". Arkiv för Matematik. Astronomi och Fysik, Band 18, Nr 30, Heft 4, p 45 (1925).
17. L.H. Thomas. "The paths of ions in the Cyclotron". Physical Review, volume 54, october 15, 1938.
18. E.D. Courant and H.S. Snyder. "Theory of the Alternating - Gradient Synchrotron". Annals of Physics : 3, pp. 1 - 48 (1958).

Citons enfin quelques ouvrages traitant de l'optique corpusculaire, des accélérateurs.

19. Albert Septier. "Focusing of charged particles". Editeur : Academic Press, New York, 1967.
20. A. P. Banford. "The transport of charged particle beams". Editeurs : E. & F. N. Spon, London, 1966.
21. Allan J. Lichtenberg. "Phase-space dynamics of particles". Editeurs : John Wiley & Sons, New York, 1969.
22. Stanley Humphries, Jr. "Principles of charged particles acceleration". Editeurs : John Wiley & Sons, New York, 1986.
23. Stanley Humphries, Jr. "Charged particle beams". Editeurs : John Wiley & Sons, New York, 1989.
24. David. C. Carey. "The optics of charged particle beams". Editeurs : Harwood academic publishers, London, 1986.
25. A. A. Kolomensky and A. N. Lebedev. "Theory of cyclic accelerators". Translated from the Russian by M. Barbier (CERN). Editeur : North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1966.

Liste des compte-rendus des

CONFERENCES INTERNATIONALES SUR LES CYCLOTRONS.

1. SECTOR-FOCUSED CYCLOTRONS.
Proceedings of an informal conference, Sea Island, Georgia, february 2-4, 1959.
F. T. Howard, editor.
Publication 656, National Academy of Sciences - National Research council,
Washington, D.C., 1959.
2. SECTOR-FOCUSED CYCLOTRONS.
Proceedings of the international conference on sector-focused cyclotrons.
University of California, Los Angeles, 17-20 april 1962.
Editors : Kai Siegbahn - Uppsala and F. T. Howard - Oak Ridge.
North-Holland publishing company - Amsterdam.
3. INTERNATIONAL CONFERENCE ON SECTOR-FOCUSED CYCLOTRONS AND
MESON FACTORIES.
CERN, april 23-26, 1963.
Proceedings edited by F. T. Howard, ORNL, N. Vogt-Nielsen, CERN.
CERN 63-19 29 may, 1963.
4. INTERNATIONAL CONFERENCE ON ISOCHRONOUS CYCLOTRONS.
Gatlinburg, Tennessee, may 2-5, 1966.
IEEE transactions on nuclear science, august 1966, volume NS-13, number 4.
5. FIFTH INTERNATIONAL CYCLOTRON CONFERENCE.
Proceedings of a conference organised by A.E.R.E., Harwell, and held at
St. Catherine's College, Oxford, 17-20 september 1969.
Editorial Chairman R. W. McIlroy, A.E.R.E., Harwell, Berks..
London Butterworths.
6. CYCLOTRONS - 1972.
Proceedings of the sixth international cyclotron conference,
Vancouver, Canada, 18-21 july 1972.
Edited for TRIUMF by J. J. Burgerjon and A. Strathdee.
AIP conference proceedings, series editor : Hugh C. Wolfe, Number 9.
American Institute of Physics, New York, 1972.

7. SEVENTH INTERNATIONAL CONFERENCE ON CYCLOTRONS
AND THEIR APPLICATIONS.
Zürich, Switzerland, 19-22 August 1975.
Proceedings editorial Chairman W. JOHO.
1975 Birkhäuser Verlag, Basel and Stuttgart.
8. EIGHTH INTERNATIONAL CONFERENCE ON CYCLOTRONS
AND THEIR APPLICATIONS.
Bloomington, Indiana, U.S.A., 18-21 september 1978.
Proceedings editor J. W.Hicks.
IEEE transactions on nuclear science, april 1979, volume NS-26, number 2.
9. NINTH INTERNATIONAL CONFERENCE ON CYCLOTRONS
AND THEIR APPLICATIONS.
September 7-10, 1981, Caen, France.
Edited by G. Gendreau.
Les Editions de physique, 91944 Les Ulis cedex, France.
10. TENTH INTERNATIONAL CONFERENCE ON CYCLOTRONS
AND THEIR APPLICATIONS.
Apri 30 - may 3, 1984, East Lansing, Michigan, U.S.A.
Edited by F. Marti.
IEEE catalog n° 84CH1996-3, library of congress catalog n° 83-83194.
11. ELEVENTH INTERNATIONAL CONFERENCE ON CYCLOTRONS
AND THEIR APPLICATIONS.
October 13-17, 1986, Tokyo, Japan.
Ionics Publishing Company, Tokyo.
12. TWELFTH INTERNATIONAL CONFERENCE ON CYCLOTRONS
AND THEIR APPLICATIONS.
Berlin, Germany, may 8-12 1989.
Editors B. Martin, K. Ziegler.
World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong.

13. THIRTEENTH INTERNATIONAL CONFERENCE ON CYCLOTRONS
AND THEIR APPLICATIONS.

Vancouver, Canada, July 6-10, 1992.

Editors G. Dutto, TRIUMF, M. K. Craddock, University of British Columbia and TRIUMF.
World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong.

Figures et compléments d'information.

Les figures n° 1 à 7, et les figures 12 et 13 sont relatives à la dynamique des particules.

Les figures n° 8 à 11 donnent un aperçu sur les cyclotrons du Ganil.

Les deux premières annexes constituent des compléments d'information sur le mouvement relatif et sur le calcul des matrices de transfert. L'annexe 3 traite du calcul du mouvement relatif radial au premier ordre dans un champ isochrone.

Dispositions communes aux figures n° 1 à 4.

Les figures n° 1 à 4 ont pour objet d'illustrer le mouvement **au premier ordre** d'un groupe de particules dans un champ magnétique admettant un plan médian.

L'observateur reste toujours dans le référentiel du laboratoire, même s'il s'intéresse au mouvement relatif dans les repères mobiles de Frenet (voir l'annexe 1).

1. Hypothèses.

Les hypothèses suivantes sont faites :

- Les particules ne changent pas d'énergie.
- Le champ magnétique est de révolution. Ceci permet d'exposer avec plus de clarté les effets fondamentaux. En effet, on évite ainsi de faire intervenir les fluctuations supplémentaires dues à la modulation azimutale du champ, qui se manifestent à la périodicité des mailles. Ces fluctuations ne sont d'ailleurs pas très importantes dans les cyclotrons.
- On néglige les pertes par rayonnement.
- On ignore les effets de charge d'espace.
- L'espace des phases est un ellipsoïde à six dimensions, et la densité des particules est uniforme dans ce volume. Toutefois on notera qu'une densité non uniforme est également admissible, à la condition que les surfaces de niveau de même densité soient des ellipsoïdes homothétiques. Sous cette condition on peut envisager, par exemple, de cerner de plus près la réalité en adoptant une répartition gaussienne de densité avec son maximum au centre, et comme il faut bien donner des dimensions finies à l'ellipsoïde d'émission, on ne prendra pas en compte les particules situées au delà d'un certain volume.
- les mouvements dans le plan médian et dans le sens axial sont supposés totalement **découplés**. Le mouvement radial est donc ici traité séparément du mouvement axial.

2. Notations utilisées pour les figures.

Les coordonnées relatives s'appellent :

- dans la direction axiale : "z".
- dans le plan médian : "x" transversalement, "delta l" longitudinalement,

La projection de la vitesse relative " dz / dt " dans la direction axiale est : " z^* ".

La projection de la vitesse relative " dx / dt " dans le sens transversal du plan radial est : " x^* ".

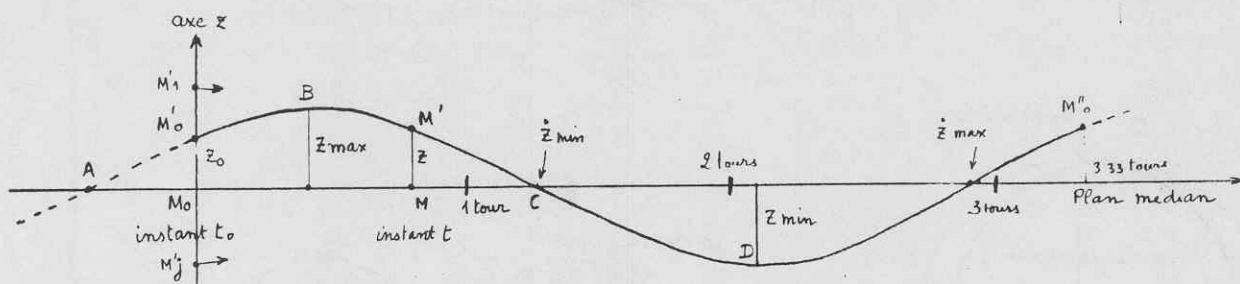
On utilise aussi la pente relative "x prime" ainsi définie :

$$x \text{ prime} = x^* / v \quad "v" \text{ est le module de la vitesse absolue de la particule de référence.}$$

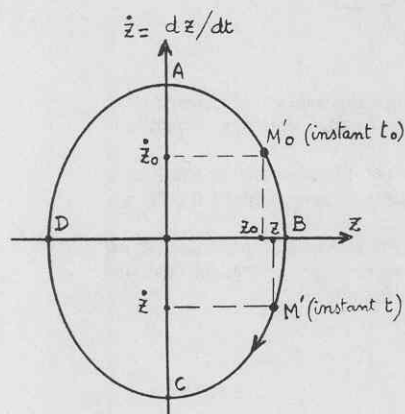
3. Formalisme de l'adaptation radiale.

Les figures 2, 3, 4 correspondent à des exemples simples, qui ne font intervenir que des particules monochromatiques. L'espace des phases radial est ainsi réduit à un espace à **trois** dimensions, qui ne pose pas de problème d'interprétation graphique.

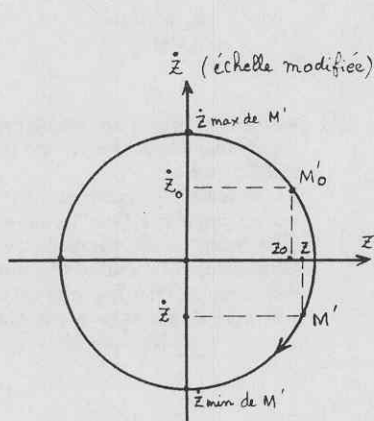
L'adaptation dans l'espace des phases radial à **quatre** dimensions doit se traiter par le calcul. Ce problème fait l'objet du rapport interne GANIL R 89 03, résumé en référence 5.



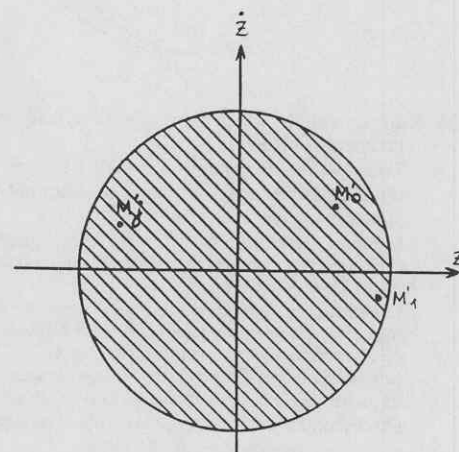
1A. Mouvement axial d'une particule M' dans l'espace réel. Ici "nu z" vaut 0.3.



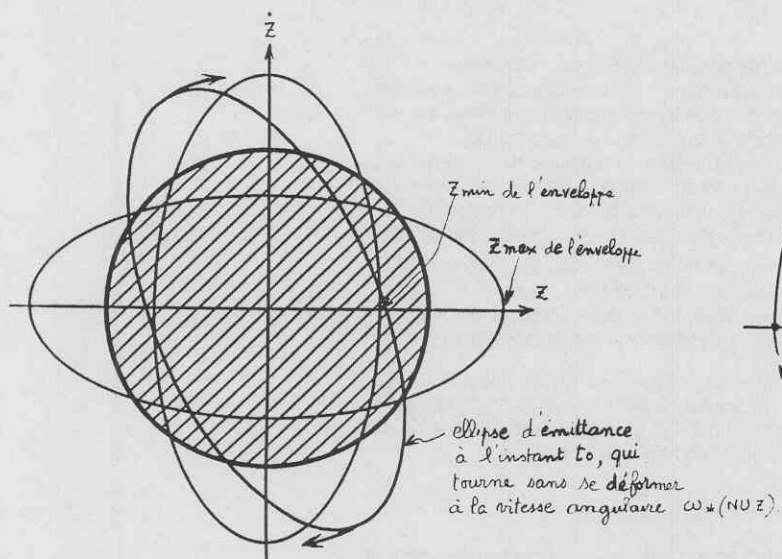
1B. Mouvement de M' dans l'espace des phases.
Vitesse angulaire moyenne de M' : $\omega * (\nu z)$



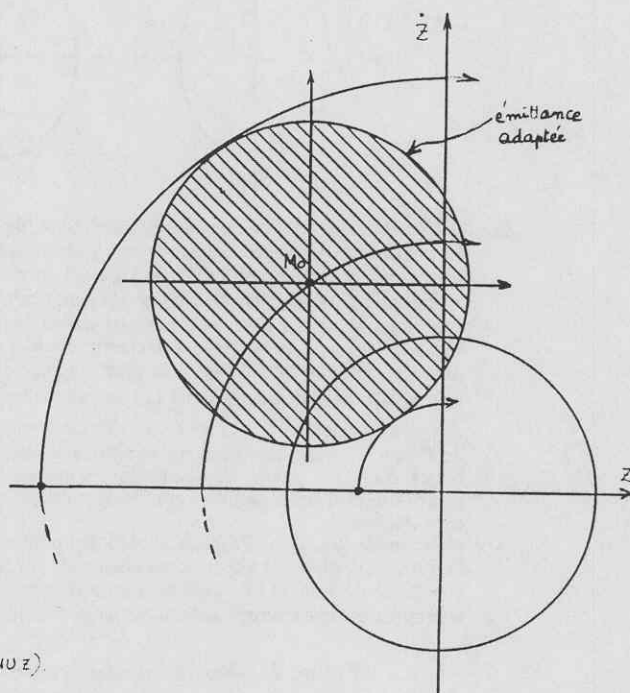
1C. Mouvement de M' dans l'espace des phases.
Echelle "z point" modifiée pour obtenir un cercle.
Vitesse angulaire instantanée de M' : $\omega * (\nu z)$



1D. Emittance adaptée à l'instant "t0".
Les particules tournent à la vitesse angulaire : $\omega * (\nu z)$. Le triangle M'0, M'1, M'j est indéformable.



1E. Défaut d'adaptation.
L'enveloppe en "z" fluctue entre "z min" et "z max" à la vitesse angulaire : $2 * \omega * (\nu z)$.

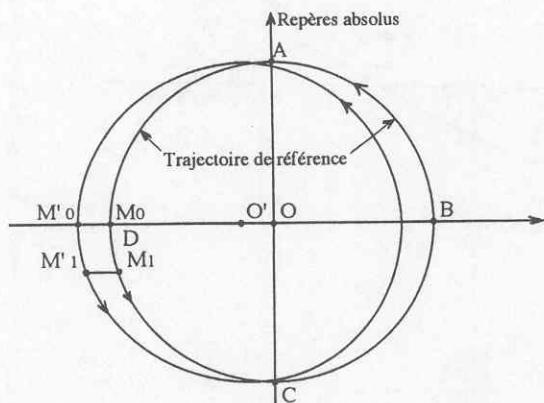


1F. Précession.
L'émittance (hachures) est supposée adaptée mais la particule centrale M0 n'est pas dans le plan médian. L'enveloppe en "z" du faisceau conserve une largeur constante, mais oscille autour du plan médian à la vitesse angulaire : $\omega * (\nu z)$.

Figure 1. Mouvement axial dans l'espace réel et dans l'espace des phases.

Pour que la focalisation axiale soit possible, nous avons choisi pour cet exemple un champ magnétique de révolution à indice positif. L'indice "n" est défini par la formule :

$$n = - (R / B) * (dB / dR) \quad B : \text{champ} \quad R : \text{rayon}$$



2A. Mouvement **absolu** de particules de même énergie dans un champ uniforme.

Trois particules voisines, M_0 , M'_0 , M'_1 sont représentées au même instant "t 0". Elles ont toutes la même vitesse angulaire " ω ".

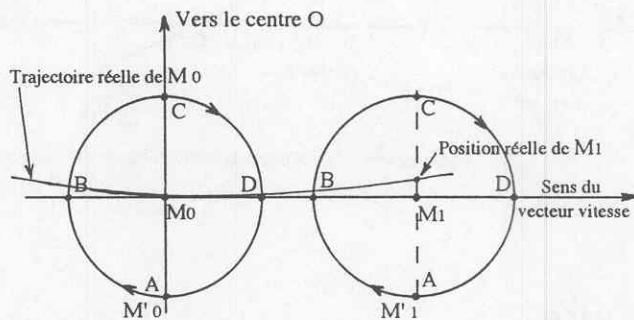
M_0 est la particule de référence. Sa trajectoire est un cercle centré en O, et de rayon R, qui constitue l'orbite d'équilibre de référence.

Les particules M'_0 et M'_1 ont été placées sur une trajectoire commune très voisine de l'orbite d'équilibre de référence. Cette trajectoire est centrée en O'.

Les cercles O et O', de rayon R, représentent les trajectoires de ces particules dans l'espace absolu.

On définira un point M_1 sur le cercle O tel que :

$$\text{arc } M_0 M_1 = \text{arc } M'_0 M'_1$$



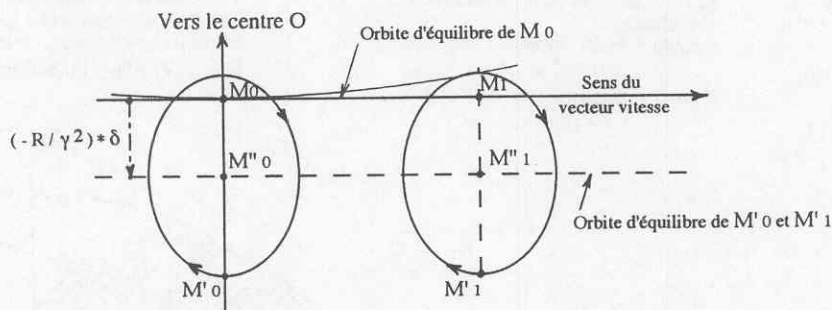
2B. Mouvement **relatif au premier ordre** correspondant à la figure 2A.

On se situe ici dans les repères relatifs de Frenet, centrés sur la particule de référence M_0 .

La particule M'_0 , représentée au temps "t 0", tourne autour de M_0 avec la vitesse angulaire " $-\omega$ ", c'est-à-dire dans le **sens opposé** à celui du mouvement absolu, sur un cercle de rayon égal à OO' .

La particule M'_1 tourne, elle aussi, à la vitesse " $-\omega$ ", sur un cercle de même rayon, dont le centre est situé, **au premier ordre**, sur l'axe des abscisses. Ce centre est le point M_1 . Par définition :

$$M_0 M_1 = M'_0 M'_1 = \text{constante}$$



2C. Mouvement **relatif**, dans un **champ isochrone**, de particules d'énergies voisines.

La disposition des particules dans l'espace absolu à l'instant "t 0" est sensiblement celle de la figure 2A, mais le rayon $O'M'_0$ est supposé un peu plus grand que le rayon OM_0 . Ce qui correspond pour les particules M'_0 et M'_1 à un écart " δ " en quantité de mouvement.

Dans ces conditions, encore **au premier ordre**, la figure 2B est remplacée par la figure 2C. On démontre que, dans le cas d'un champ isochrone de révolution, les trajectoires relatives des particules M'_0 et M'_1 ne sont plus des cercles, mais des ellipses d'excentricité " γ " parcourues à la vitesse angulaire moyenne " $-\omega * \gamma$ ". Ces ellipses sont centrées sur un axe d'ordonnée égale à " $(-R / \gamma^2) * \delta$ ". Cet axe représente, au premier ordre, dans le dièdre de Frenet, l'orbite d'équilibre correspondant à l'énergie de M'_0 et M'_1 .

Noter que " R ", rayon de courbure de l'orbite d'équilibre de référence, est compté positivement si les particules tournent dans le sens trigonométrique, et négativement pour le sens opposé.

Noter aussi que, **dans l'espace absolu**, les orbites d'équilibre sont des cercles du fait que l'on a choisi pour cet exemple un champ de révolution, et que d'autre part la trajectoire commune de M'_0 et M'_1 n'est plus un cercle parce que " γ " n'est plus égal à l'unité. Cette trajectoire est une courbe oscillant autour de l'orbite d'équilibre correspondante.

Figure 2 . Mouvement relatif **radial** dans l'espace réel.

Les figures 2A et 2B correspondent au mouvement de particules monochromatiques dans un champ uniforme. Ces hypothèses particulières permettent d'illustrer de manière simple la correspondance entre mouvement absolu et mouvement relatif.

La figure 2C correspond à un champ de révolution isochrone, donc à indice négatif. Un tel champ est défocalisant axialement, et il ne peut donc pas être envisagé pour les cyclotrons. Cependant, du point de vue du comportement des particules dans le plan radial, ce champ possède des propriétés très proches de celles qui correspondent au champ isochrone à variation azimutale universellement utilisé pour remplir les conditions de focalisation axiale. Ce qui est "rayon" et "champ" dans le premier cas devient alors "rayon moyen" et "champ moyen" dans le second.

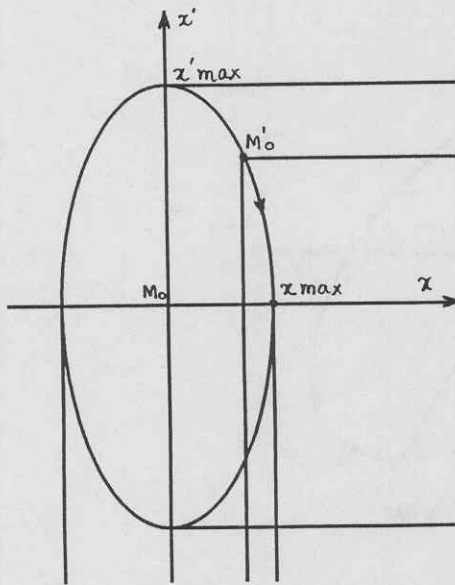


Figure 3A. Sous espace des phases "x, x prime".

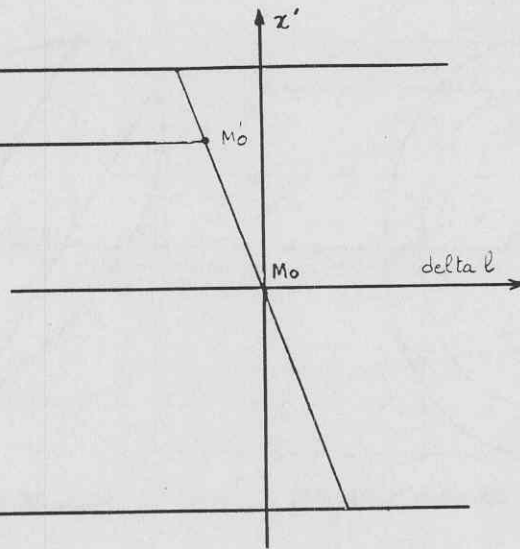


Figure 3B. Plan "delta l, x prime".

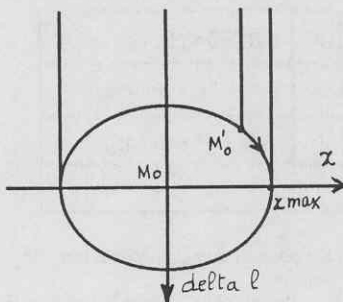


Figure 3C. Plan "delta l, x".

La pente relative x' est reliée à la vitesse relative transversale x^* par la relation :

$$x' = x^* / v$$

v étant le module de la vitesse absolue de la particule de référence.

Figure 3 . Mouvement d'une particule dans l'espace des phases radial.

Le champ est supposé être de révolution et isochrone. La résolution des équations du mouvement relatif au premier ordre conduisent aux résultats suivants :

- Soit $M'0$ une particule voisine de la particule de référence, et de même énergie.

- Figure 3A. Dans le plan "x, x prime" les coordonnées sont en quadrature de phase. Les valeurs maximales sont reliées par la relation :

$$x_{\max} = (R / \gamma) * x'_{\max}$$

Rappelons que la pente relative "x prime" est égale à la vitesse relative "dx / dt" divisée par le module "v" du vecteur vitesse absolue de la particule de référence.

Le sens de la rotation dans le plan "x, x prime" (attention à la disposition des axes) est opposé au sens de rotation de la particule de référence dans l'espace absolu.

- Figure 3B. Dans le plan "delta l, x prime" les coordonnées sont en phase. La droite correspondant au mouvement de $M'0$ est définie par :

$$\delta l = (-R / \gamma^2) * x'$$

"delta l" est la coordonnée définissant la position longitudinale relative.

- Figure 3C. Dans le plan "delta l, x", les coordonnées sont en quadrature de phase. Les valeurs maximales sont liées par la relation :

$$x_{\max} = \gamma * \delta l_{\max}$$

Le sens de rotation est le même que dans le plan "x, xprime".

Remarque. Le champ étant de révolution, tous les mouvements sont exécutés à la vitesse angulaire " $-\omega * \gamma$ ", ou encore " $-\omega$ nur", car le champ étant aussi isochrone, "nu r" s'identifie à " γ ".

Autrement dit, la trajectoire elliptique de $M'0$ est bouclée en un temps légèrement plus court que la période de révolution de la particule de référence.

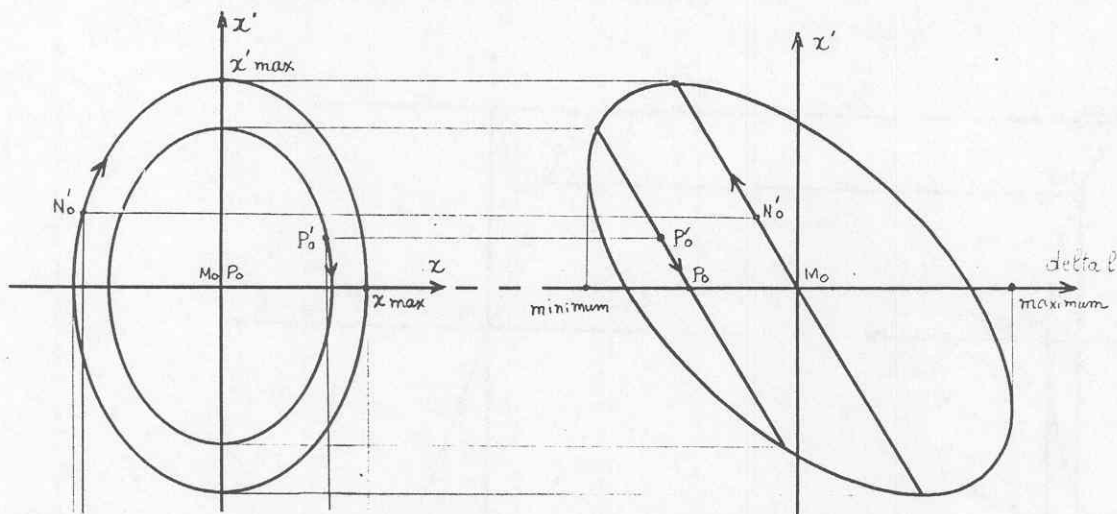


Figure 4A. Sous espace des phases "x, x prime".

Figure 4B. Plan "delta l, x prime".

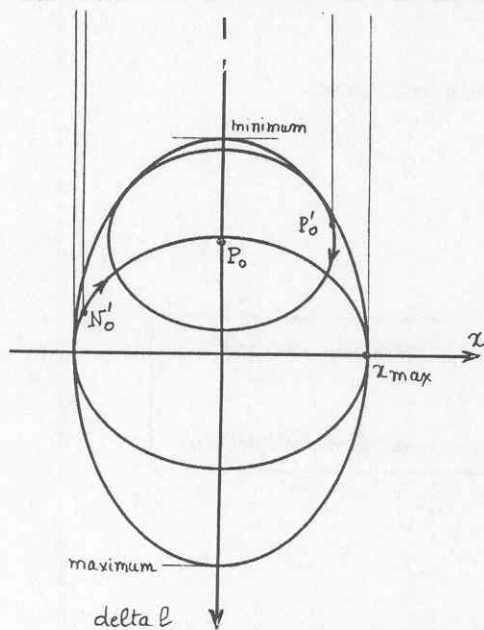


Figure 4C. Plan "delta l, x".

$\cos(\arg)$	$R / \gamma * \sin(\arg)$	0	$(-R / \gamma^2) * (1 - \cos(\arg))$
$(- \gamma / R) * \sin(\arg)$	$\cos(\arg)$	0	$(- 1 / \gamma) * \sin(\arg)$
$(1 / \gamma) * \sin(\arg)$	$(R / \gamma^2) * (1 - \cos(\arg))$	1	$(R / \gamma^3) * \sin(\arg)$
0	0	0	1

Tableau de la matrice de transfert radiale calculée pour un tour complet le long de l'orbite d'équilibre dans un champ de révolution isochrone.

Les coordonnées relatives sont dans l'ordre: "x, x prime, delta l, delta p / p" dans le

tableau 4 * 4. Le tableau 3 * 3 encadré d'un trait épais correspond à des particules monochromatiques.

Les signes correspondent à un sens de parcours dans le sens trigonométrique.

Nous rappelons que ce champ est instable axialement, mais qu'il est globalement utilisable dans le plan radial pour étudier l'allure des phénomènes.

$\arg = 2 * \pi * \gamma$. R est le rayon de courbure de l'orbite, compté positivement pour une rotation dans le sens trigonométrique, et γ est le facteur relativiste.

Pour un champ symétrique, ce qui est le cas, il n'existe qu'un seul terme de corrélation entre le mouvement longitudinal et le mouvement transversal. C'est le terme liant "delta l" à "x prime", et sa valeur est égale au rapport M_{31} / M_{21} , soit $- R / \gamma^2$ pour ce champ de révolution isochrone.

Figure 4. Ellipsoïde d'émittance adapté dans l'espace des phases radial.

Les hypothèses sont les mêmes que pour la figure 3. Toutes les particules sont supposées être à la même énergie. Les projections de l'enveloppe d'un ellipsoïde d'émittance supposé préalablement adapté sont représentées dans les trois plans.

- La figure 4A représente la projection de l'enveloppe de l'ellipsoïde d'émittance dans le plan "x, x prime". La condition d'adaptation concernant ce plan est :

$$x_{\max} = (R / \gamma) * x_{\text{prime max}}$$

Une particule N'0, situé à un moment donné sur le contour de l'enveloppe, reste sur l'enveloppe en la parcourant avec la vitesse angulaire $\omega * \gamma$.

- La figure 4B représente la projection de l'enveloppe dans le plan "delta l, x prime". La condition d'adaptation est pour ce plan :

$$\text{"delta l"} = (-R / \gamma^2) * x_{\text{prime}}$$

Dans ce plan, toutes les particules, comme par exemple la particule quelconque P'0, se déplacent parallèlement à cette droite. On dit alors que le mouvement longitudinal est corrélé avec le mouvement transversal de manière à obtenir une enveloppe invariable.

- La figure 4C représente la projection de l'enveloppe dans le plan "delta l, x". Les trajectoires de N'0 et de P'0 sont représentées.

Remarque. Si au temps initial "t o" on modifie la loi de corrélation, sans modifier bien sûr le volume d'émittance, on ne modifiera à cet instant que la dimension longitudinale de l'ellipsoïde d'émittance. Mais en fonction du temps l'enveloppe en "x" et l'enveloppe en "delta l" oscilleront autour de valeurs moyennes à la périodicité "nu r".

M est une particule chargée positivement,
 l'induction est dirigée vers le haut,
 la particule se dirige vers l'observateur,
 la composante axiale fait tourner la particule autour du centre,
 la petite composante radiale "Mr" est à l'origine d'une force
 dirigée vers le haut.

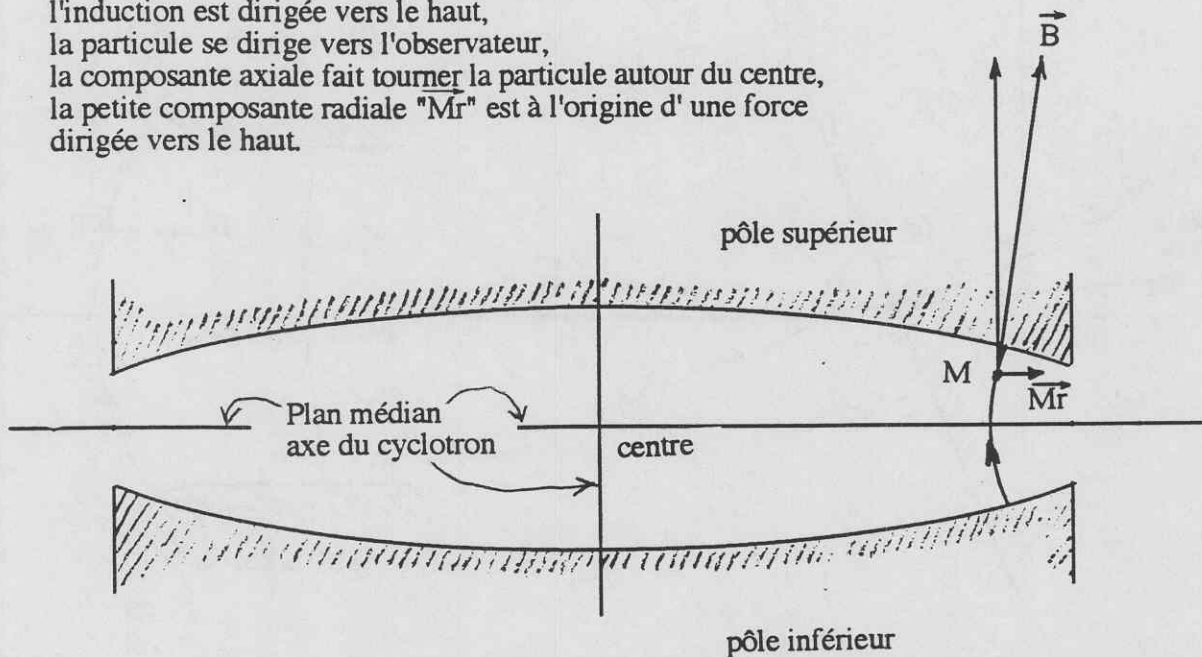


Figure 5. Un champ isochrone de révolution est défocalisant axialement.

La figure représente la vue en coupe d'un cyclotron isochrone ayant des pôles de révolution. Le module "b" du vecteur induction magnétique mesuré dans le plan médian croît radialement, à partir du centre, selon la loi :

$$b = b_0 * \gamma$$

b_0 est la valeur de "b" au centre,

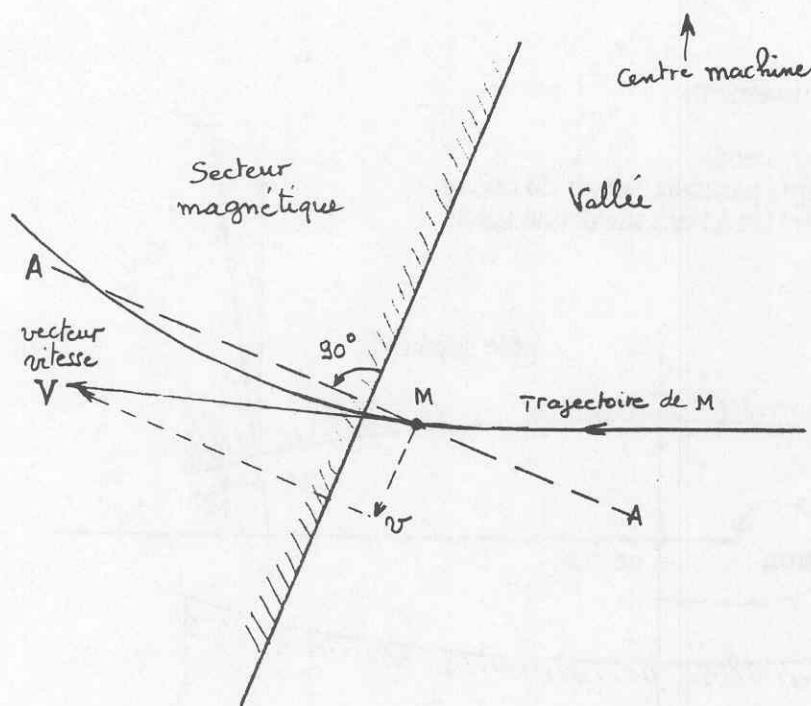
et " γ " est relié au rayon "r" par la relation : $\gamma = 1 / \sqrt{1 - (\omega * r / c)^2}$. ω est constant.

La loi de champ radiale est réalisée ici par une réduction progressive de l'entrefer. On sait en effet que l'induction magnétique mesurée à un rayon "r" est inversement proportionnelle à l'entrefer correspondant à ce rayon.

Noter que l'allure des lignes de force serait semblable si l'on était parti de pôles à faces parallèles, l'augmentation radiale de l'induction étant dans ce cas obtenue par des bobines circulaires plaquées sur les pôles. On ne peut pas échapper à la courbure des lignes de force telle qu'elle est indiquée sur la figure. Ceci découle d'ailleurs des lois générales du magnétisme.

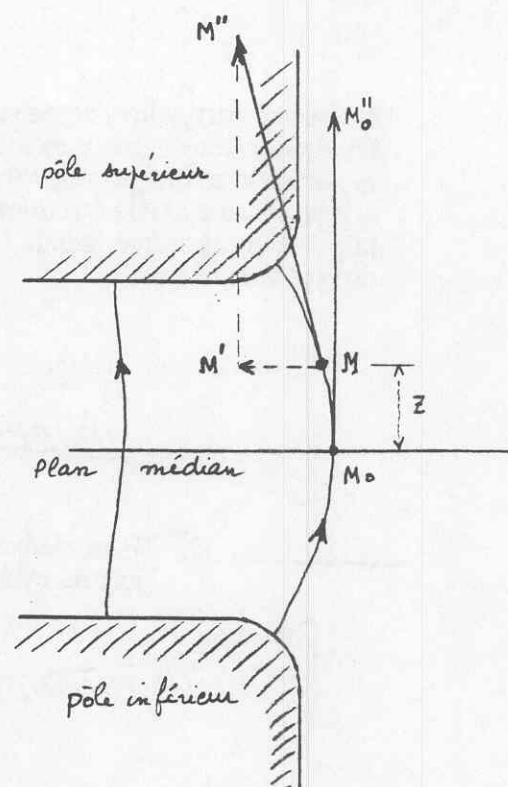
Cette courbure fait qu'il existe une petite composante radiale de l'induction magnétique pour toute particule M située hors du plan médian. Si l'on se rappelle que le trièdre *courant, champ, force* est un trièdre direct, on constate que cette petite composante est à l'origine d'une force qui a tendance à éloigner M du plan médian. Comme il n'existe aucune autre force antagoniste capable de ramener la particule vers le plan médian au cours de sa rotation autour du centre de ce champ de révolution, la particule ira se perdre sur les pôles.

En conclusion, les trajectoires de particules dans un champ isochrone de révolution sont instables axialement.



Vue en plan.

\vec{Mv} est la composante du vecteur vitesse \vec{MV} du point M, selon une parallèle à la face polaire.



Coupe verticale selon A - A.

$\vec{MM'}$ est la composante de l'induction magnétique au point M de cote "z", selon la normale à la face polaire.

- Le produit vectoriel de \vec{Mv} par $\vec{MM'}$ donne une force dirigée vers le bas, si la charge de M est positive.
- **Au premier ordre :** le module de $\vec{MM'}$ est proportionnel à "z",
la composante $\vec{MM''}$ normale au plan médian est égale à la composante $\vec{M0M''}$,
M se projette en M0.

Figure 6. Force de rappel axiale dans le gradient de champ de fuite d'un dipôle.

La figure représente la trajectoire d'une particule pénétrant dans un secteur magnétique à bord droit d'un cyclotron, donc sous un angle différent de la normale.

Dans le cas de cyclotrons à secteurs spiralés, et pour une spiralisation importante, l'entrée du secteur est fortement focalisante, mais la sortie est défocalisante. La convergence axiale globale est cependant très importante (gradients alternés séparés par une distance de glissement).

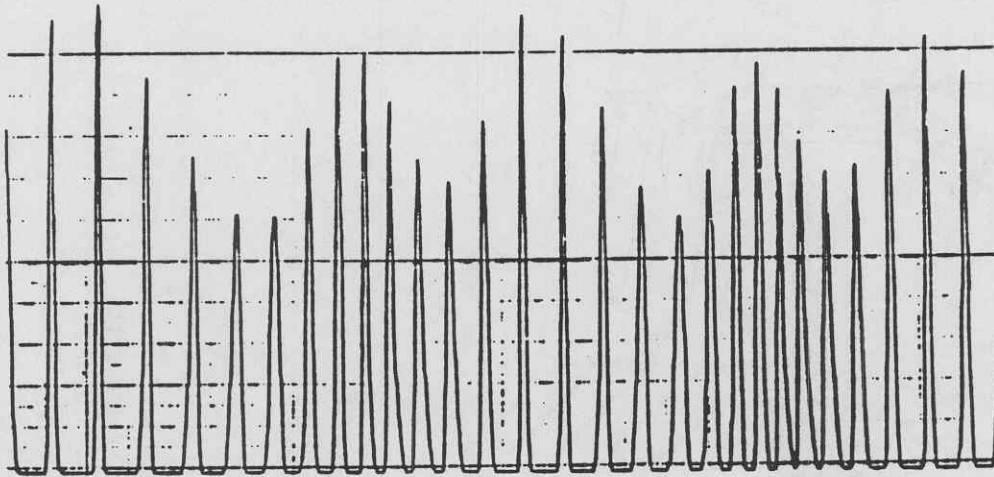


Figure 7. Enregistrement du profil radial d'un faisceau accéléré.

Cet enregistrement de la densité radiale d'un faisceau en fonction du rayon, obtenu à partir du courant intercepté par une sonde mobile équipée d'un doigt de mesure différentiel, a été faite sur le cyclotron à secteurs séparés CSS1 du Ganil. Il s'agit d'une mesure de routine.

L'amplitude des pics est proportionnelle à la densité de courant, et par conséquent, **plus le faisceau est étroit, plus le pic est haut.**

Le rayon va en augmentant de la gauche vers la droite, les tours vont en se resserrant lentement.

Le nombre d'onde radial peut se mesurer approximativement de la manière suivante. La **distance entre les tours** laisse apparaître une modulation se répétant tous les "n" tours environ, n étant sensiblement égal à 13. Ce phénomène est dû à une **précession**, qui n'est pas intentionnelle. La précession provient de la région d'injection et se propage sans s'amplifier jusqu'au rayon d'extraction.

Le nombre d'onde radial étant voisin de l'unité, le calcul de "nu r" se fait par la formule :

$$n = 1 / (\nu r - 1) \quad \text{soit } \nu r = 1.08 \text{ environ}$$

De fait, dans un cyclotron à secteurs séparés, les valeurs de "nu r" sont bien connues et varient peu d'un faisceau à l'autre, mais il faut y faire attention, particulièrement dans le cas des cyclotrons compacts, dans la région centrale et dans la région d'extraction, où "nu r" est voisin de l'unité, donc d'une résonance. H. Blosser, de Michigan State University, a été l'un de premiers à faire l'analyse de la précession dans un cyclotron.

D'autre part, en observant la modulation d'amplitude de la série des pics, on arrive à discerner deux fréquences distinctes.

La périodicité de 6 ou 7 tours, correspond à une fréquence relative " $2 * \nu r$ " et provient donc d'un petit **défaut d'adaptation** dans le sous espace des phases transverse "x, x prime". La largeur des tours fluctue du fait de ce défaut d'adaptation à la fréquence " $2 * \nu r$ ", ce qui donne naissance, par effet stroboscopique, à ce phénomène répétitif tous les 6 ou 7 tours.

Enfin, on peut voir, un peu moins distinctement, une modulation d'amplitude d'une périodicité de 13 tours, donc à la fréquence "nu r", qui provient par conséquent d'un **défaut de corrélation** entre les sous espaces des phases longitudinal et transversal.

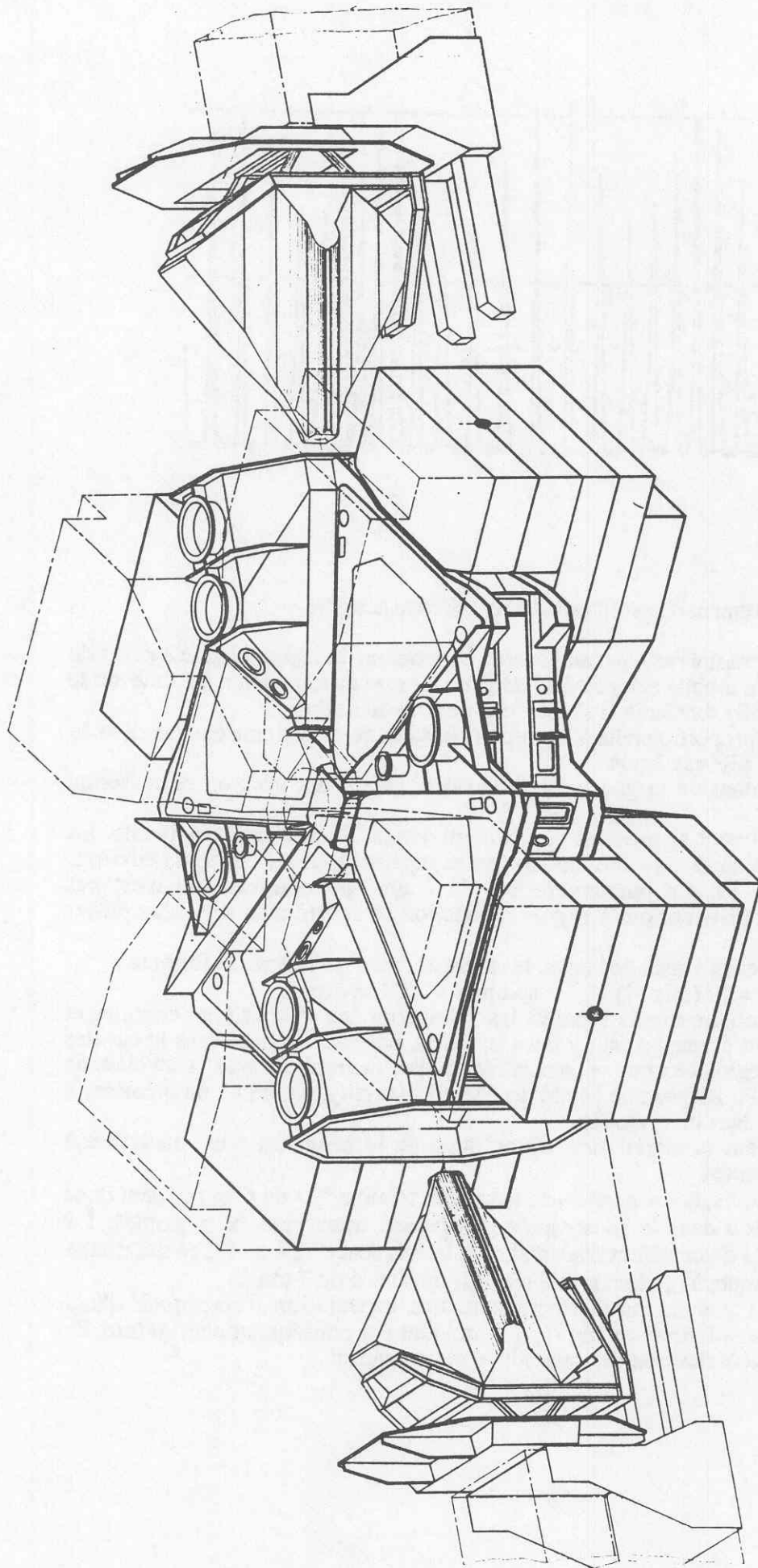


Figure 8. Dessin en perspective d'un cyclotron à secteurs séparés du Ganil.

On distingue les quatre secteurs magnétiques, la chambre à vide, les résonateurs HF sortis. Pour la clarté du dessin, les parties supérieures des quatre secteurs, en tirets, laissent transpar tre la chambre à vide.

Le diamètre hors-tout est d'environ 11 mètres, et la hauteur de 5 mètres.

Les aimants ont une masse totale de 1700 tonnes.

La chambre à vide a un volume de 45 mètres cubes et une masse d'environ 50 tonnes. Les grandes brides circulaires de la chambre à vide sont destinées à l'installation des pompes à vide (non figur es) utilisant la détente d'hélium gazeux en circuit fermé pour descendre à 20 degrés Kelvin.

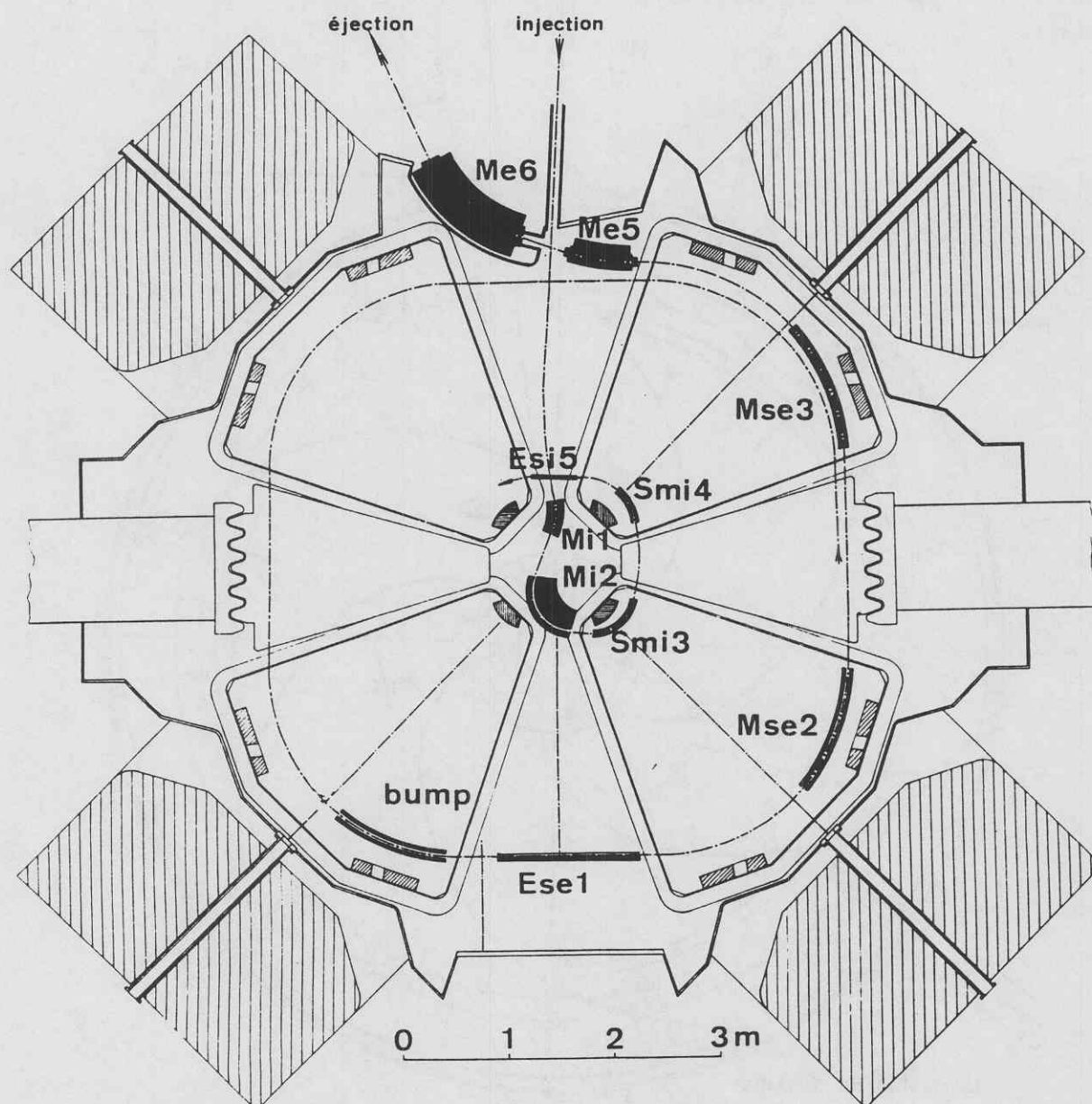


Figure 9. Vue du plan médian d'un Cyclotron à secteurs séparés du Ganil.

On peut voir les quatre pôles magnétiques de 52 degrés d'ouverture angulaire, ceinturés par leurs bobines principales, mais les enroulements des bobines de correction qui tapissent les surfaces polaires n'apparaissent pas. On voit aussi les deux résonateurs HF dont l'accord est effectué par déplacement de panneaux capacitifs (surfaces ondulées). Les électrodes, encore appelées *dees*, ont une ouverture angulaire totale de 34 degrés.

Bien entendu, il faut interpréter ce plan dans le sens qu'il n'existe aucun obstacle au passage du faisceau au niveau du plan médian.

Des espaceurs situés au centre et à la périphérie (pièces hachurées) maintiennent le parallélisme des surfaces polaires. Les forces magnétiques sont importantes : environ 100 tonnes par mètre carré de surface polaire.

Enfin, l'injection et l'éjection du faisceau s'opèrent en utilisant l'action d'une série de dipôles électrostatiques et magnétiques.

La chambre à vide enveloppe le tout. Une pression résiduelle maximale de $5 \cdot 10^{-6}$ pascal est nécessaire pour éviter les pertes de particules en cours d'accélération.

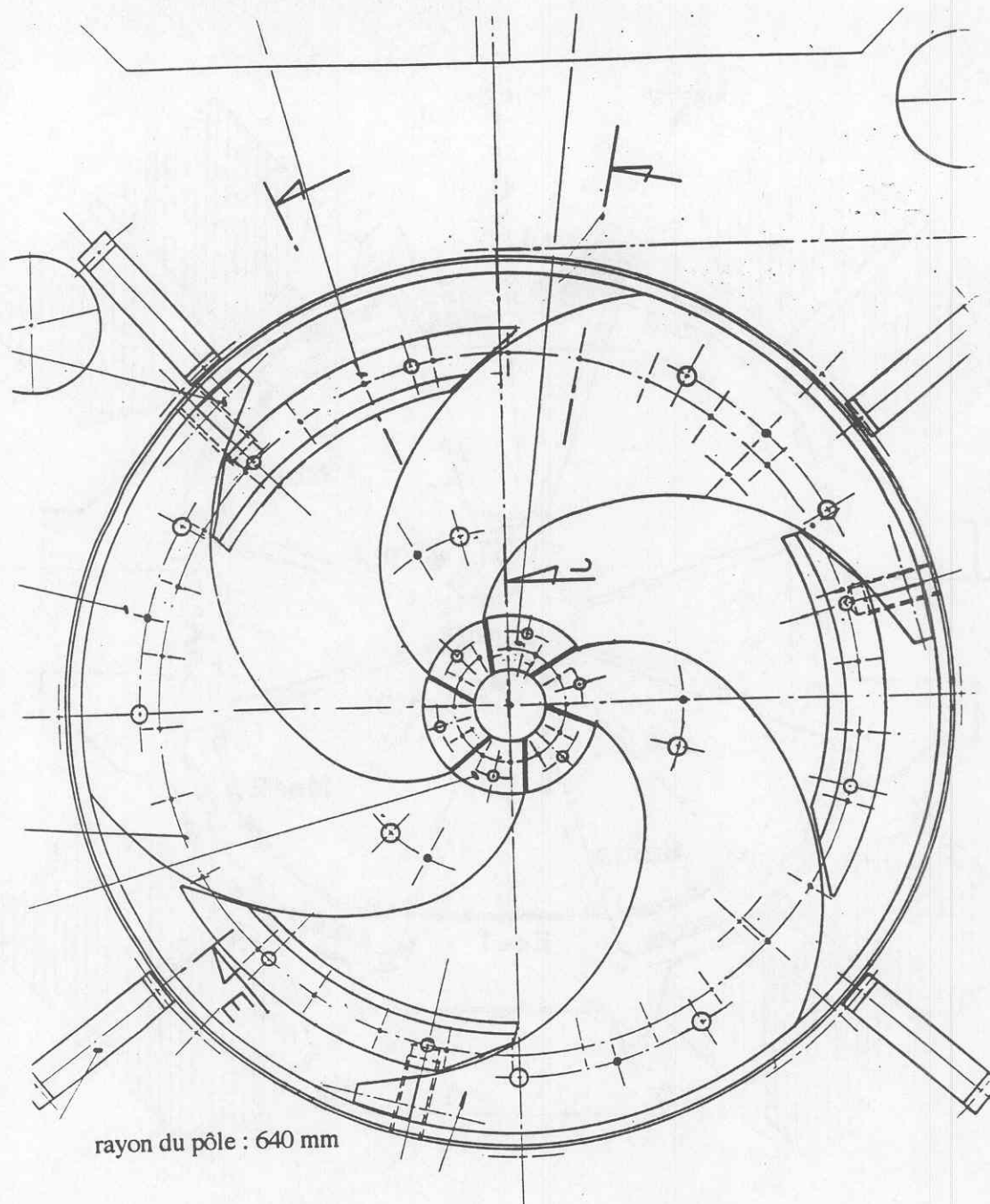


Figure 10. Vue en plan du pôle inférieur du cyclotron injecteur "C02" du Ganil.

Le pôle par lui-même est une surface plane de révolution, et l'on distingue les trois secteurs spiralés, encore appelés *collines*, qui sont des pièces rapportées. L'induction est plus forte entre les collines, puisque l'entrefer y est plus petit. La forme spiralée des collines contribue à l'augmentation de la focalisation axiale.

Dans la région centrale des cyclotrons compacts la modulation azimuthale du champ au niveau du plan médian est de très faible amplitude. A la limite, elle est nulle au centre géométrique.

Cependant, l'effet de focalisation axiale dû à la forme des équipotentielles du champ électrique des espaces accélérateurs, négligeable à grande énergie, devient prépondérant dans la région centrale du fait de la faible énergie des particules. A noter que cet effet est dépendant de la phase de passage des particules.

Dans le cas du cyclotron C02, dont le gain radial est très important, la focalisation électrique n'est pas indispensable, et on la modère par l'installation de *piliers* implantés sur les bords des *dés* et *contre-dés*.

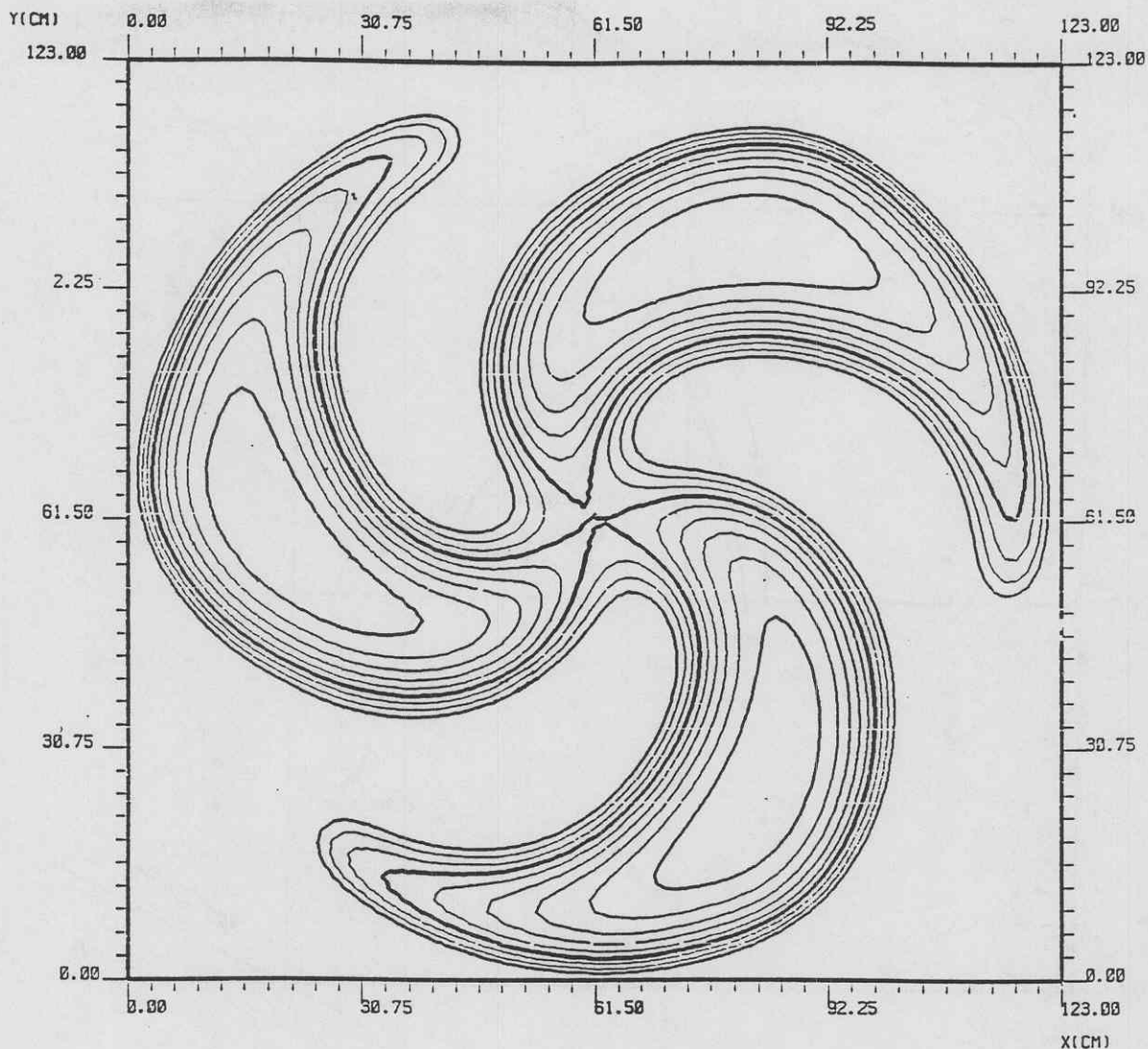


Figure 11. Cartographie magnétique.

Cette figure représente un réseau de courbes à niveau constant d'une carte de champ magnétique mesurée sur un modèle réduit de l'aimant du cyclotron C02. La valeur maximale de l'induction est ici de 1.4 Tesla, les niveaux ont un intervalle de 0.02 Tesla, et seuls les niveaux les plus élevés ont été tracés.

Ces courbes ont un caractère figuratif. Elles permettent de déceler des erreurs instrumentales éventuelles. L'exploitation des cartes de champ se fait normalement par calcul numérique.

On a recours de plus en plus aux programmes de calcul à trois dimensions pour définir et optimiser les circuits magnétiques que l'on se propose de construire. La fabrication de modèles, encore appelés maquettes, n'est plus une nécessité.

Des mesures magnétiques sont néanmoins indispensables sur les circuits magnétiques définitifs afin d'en évaluer les imperfections et d'apporter éventuellement des modifications.

Les mesures magnétiques se font point par point selon un maillage en coordonnées polaires ou cartésiennes. Les capteurs, installés sur des mécanismes de déplacement, non magnétiques bien sûr, peuvent être des sondes de Hall, ou bien des bobines de petit diamètre, comportant de nombreuses spires, aux bornes desquelles on peut mesurer une différence de potentiel proportionnelle à la variation du flux qui les traverse.

Il existe deux façons d'utiliser une bobine d'induction. Par retournement de 180 degrés de la bobine, on obtient un signal proportionnel à la valeur absolue de l'induction magnétique. Il s'agit d'une valeur moyenne, la bobine ayant une certaine surface.

Par une translation de la bobine, et à condition de débiter le mouvement dans une zone sans champ, on peut mesurer un signal proportionnel à la valeur absolue de l'induction tout au long de la trajectoire.

Pour l'étalonnage des capteurs, on utilise des sondes à résonance nucléaire, qui ont une précision de l'ordre de 10^{-5} Tesla. Cet étalonnage ne peut se faire que dans une région de champ uniforme.

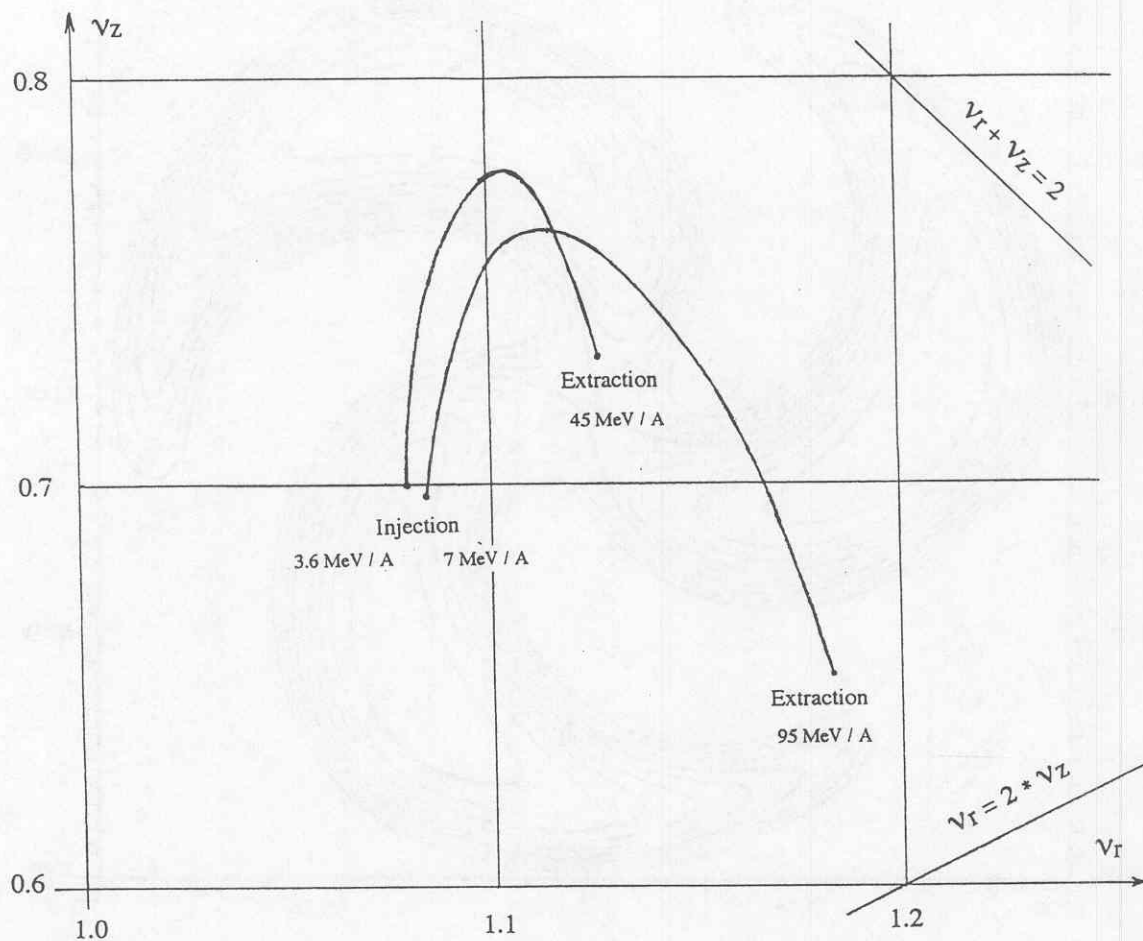


Figure 13. Diagramme des nombres d'onde radial et axial.

La figure représente le diagramme des nombres d'onde radial et axial du deuxième CSS (Cyclotron à Secteurs Séparés) de Ganil. Les coordonnées sont : horizontalement le nombre d'onde radial, et verticalement le nombre d'onde axial. Deux cas différents sont représentés. Chacune des deux courbes correspond à un ion donné, injecté à basse énergie, dans un champ isochrone, et accéléré jusqu'au rayon d'extraction.

Notons que les CSS de Ganil sont caractérisés par des secteurs à bords sensiblement rectilignes, et que les faces polaires sont planes et parallèles.

Dans un champ isochrone, le gradient radial moyen suit la variation du facteur relativiste " γ ". Le gradient a une valeur plutôt faible dans la région d'injection. Ce qui explique la faible variation du nombre d'onde radial dans cette zone. Par contre, le nombre d'onde axial croît rapidement.

Commentaires.

Dans la région d'injection, le gradient du champ magnétique est faible, la focalisation axiale dépend donc principalement de l'effet de bord des secteurs. Les pôles ayant des faces parallèles, le profil du champ de fuite le long d'une perpendiculaire au bord des pôles a sensiblement la même apparence à tous les rayons. Par conséquent, plus le rayon est petit, plus l'étendue **azimutale** du champ de fuite est grande. La focalisation axiale est donc minimale au rayon d'injection, puis augmente rapidement dans cette zone où le gradient de champ reste faible.

Au centre d'un cyclotron compact, le champ est uniforme et la focalisation axiale y est nulle.

Fin des commentaires.

La partie haute énergie des courbes correspond à une région caractérisée par une augmentation rapide du gradient de champ en fonction du rayon. Le champ moyen est en effet 10 pour cent plus élevé à 95 MeV par nucléon qu'à basse énergie. A grand rayon, cela entraîne d'importantes variations, de sens opposés, de la focalisation axiale et de la focalisation radiale. Le nombre d'onde axial décroît, et le nombre d'onde radial croît en fonction du rayon.

La figure montre les droites représentant les résonances les plus proches : $v_r = 2 * v_z$ and $v_r + v_z = 2$.

Remarques. - les nombres d'onde sont calculés à partir de cartes de champ mesurées.

- On peut voir que la variation du nombre d'onde radial v_r entre l'injection et l'extraction est sensiblement égale à la variation du facteur relativiste " γ ".

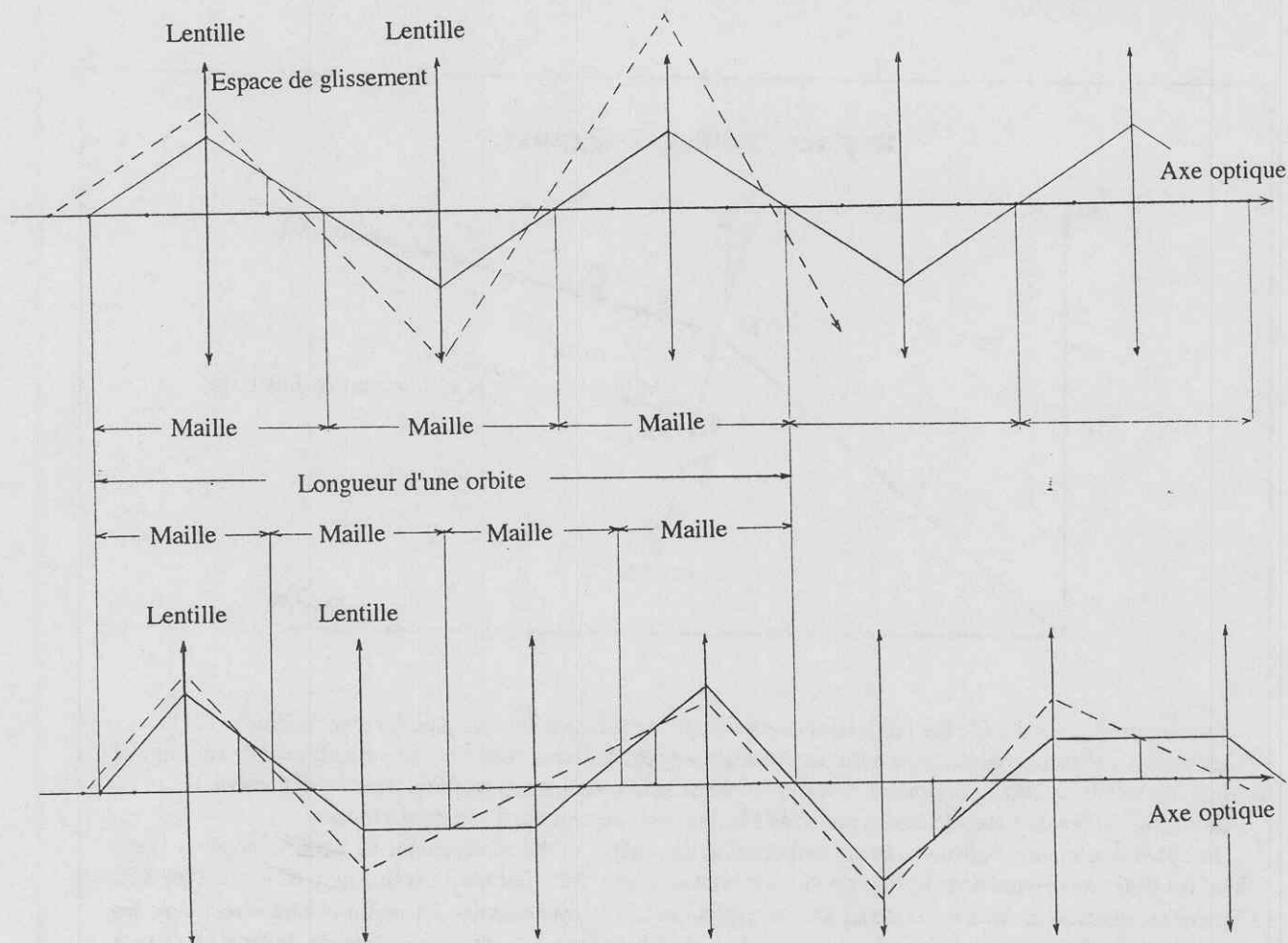


Figure 12. Limite de stabilité d'un cyclotron isochrone.

Nous allons montrer qu'un cyclotron doit comporter des secteurs en nombre d'autant plus grand que son énergie finale est plus élevée.

En premier lieu, nous rappellerons les principes de base régissant la stabilité d'un système périodique, à partir de modèles empruntés à l'optique classique.

Les deux systèmes optiques illustrés ci-dessus sont composés d'une série de lentilles et d'espaces de glissement disposés à intervalles réguliers. Le système défini en partie supérieure comporte des espaces de glissement égaux à quatre fois la distance focale des lentilles. On peut voir que la trajectoire tracée en trait plein est stable, et qu'elle oscille avec un glissement de phase égal à π radian pour chaque maille. Mais une trajectoire quelconque (en tirets) oscille autour de l'axe optique avec une amplitude allant en croissant. Ce système optique est inutilisable. Précisons ce point en faisant appel à la matrice de Twiss.

Considérons une maille composée d'une lentille convergente de distance focale positive " f ", placée entre deux espaces de glissement de longueur " $d/2$ ". Après avoir calculé la matrice de transfert correspondante et fait l'identification avec la matrice de Twiss, on obtient la valeur du terme " $\cos \mu$ " de cette matrice :

$$\cos \mu = 1 - d / (2 * f) \quad \mu \text{ représentant le glissement de la phase de l'oscillation le long d'une maille.}$$

Pour le système optique représenté en partie supérieure, $\cos \mu = -1$. On est en limite de stabilité. On peut affirmer, plus généralement, que toute valeur de " d " supérieure à " $4 * f$ " rend le système totalement instable, car $\cos \mu$ ne peut plus alors être défini.

Pour un système ayant des espaces de glissement inférieurs à 4 fois la distance focale, toutes les trajectoires sont stables, $\cos \mu$ étant défini. C'est le cas du deuxième système optique représenté ci-dessus. Dans cet exemple, les dispositions arbitraires suivantes ont été prises : la longueur des espaces de glissement a été réduite aux $3/4$ de la valeur précédente, et la distance focale " f " a été modifiée, de manière à satisfaire la relation :

$$d = (2 + \sqrt{2}) * f \quad \text{"sqrt" signifiant racine carrée.}$$

Notons que la nouvelle valeur de " d " est plus petite que 4 fois la nouvelle distance focale, et ceci a pour effet de rendre stables les trajectoires de ce second système. Notons aussi que la nouvelle distance focale est plus petite que la précédente : les nouvelles lentilles sont un peu plus convergentes que les anciennes.

Le glissement de phase correspondant à une maille, dans ce second système, est égal à $3/4$ de π radian. Ceci peut se voir sur la trajectoire tracée en traits pleins : la phase glisse de 3π radian pour un déplacement de quatre mailles. La valeur de $\cos \mu$ est égale à " $-\sqrt{0.5}$ " pour une maille. Toutes les trajectoires sont stables.

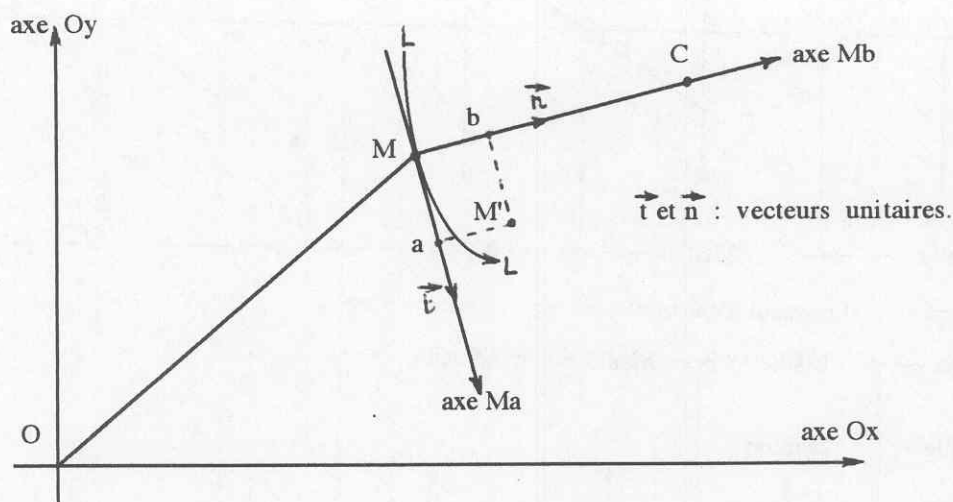
En second lieu, nous établirons un parallèle avec les conditions de stabilité dans un cyclotron. La succession de secteurs et de vallées, dans un cyclotron obéit aux mêmes lois que la succession de lentilles et d'espaces de glissement d'un système optique. Mais avant d'aller plus loin, il est nécessaire de rappeler la propriété suivante d'un champ magnétique isochrone : à un rayon donné, le nombre d'onde radial et le facteur relativiste " γ " ont approximativement la même valeur.

Considérons alors un cyclotron à 3 secteurs. Lorsque le faisceau atteint le rayon correspondant à $\gamma = 1.5$ (soit environ 460 MeV), le nombre d'onde atteint lui aussi la valeur de 1.5. Ce nombre d'onde signifie que l'oscillation radiale d'une particule autour de sa trajectoire d'équilibre glisse en phase de π radian par maille. Cette configuration correspond à celle du système optique défini en partie supérieure, pour lequel le glissement de phase est de π radian par maille. La conclusion est qu'un cyclotron à 3 secteurs est limité en principe à $\gamma = 1.5$. Au delà, le fonctionnement stable n'est plus possible.

Dans les mêmes conditions, c'est-à-dire si le nombre d'onde et " γ " ont pour valeur 1.5, un cyclotron à 4 secteurs se comportera de la même manière que le deuxième système optique. Bien que les secteurs soient un peu plus focalisants dans ce second cas, la stabilité radiale est acquise. Physiquement, l'augmentation de la focalisation des secteurs dans ce second cas s'explique ainsi : chaque secteur est un peu plus mince, donc moins focalisant radialement, mais la trajectoire est plus "ronde" et par conséquent l'effet de défocalisation radiale due à l'inclinaison des faces d'entrée et de sortie des secteurs est réduit. C'est ce second effet qui l'emporte.

En pratique, les cyclotrons de haute énergie comportent des secteurs en plus grand nombre qu'il n'est théoriquement nécessaire. Des considérations d'ordre pratique prévalent, comme le nombre d'électrodes d'accélération à installer, ou bien encore l'intérêt de secteurs moins lourds parce que plus nombreux.

Repères mobiles de Frenet.



Nous nous plaçons dans le cas particulier de particules se déplaçant dans un plan (le plan médian).

L'observateur se trouve situé en permanence dans les repères fixes "Ox, Oy" qui constituent le référentiel absolu, ou référentiel du laboratoire. Les observations se font toutes sans exception dans ce référentiel.

La courbe "L" est la trajectoire de la particule M considérée comme particule de référence.

On considère maintenant un système orthonormé de repères mobiles admettant M comme origine. L'axe "Ma" est toujours orienté dans le sens du vecteur vitesse. L'axe "Mb" fait toujours un angle de $\pi/2$ avec Ma. Cet axe est donc celui de la normale en M à la trajectoire L. Le troisième axe forme un trièdre direct avec les deux premiers. Il est selon nos hypothèses normal au plan de la figure. Il est dirigé en toutes circonstances vers l'observateur.

Ces repères mobiles sont les repères de Serret-Frenet.

On démontre qu'à un instant donné le mouvement de M dans le référentiel du laboratoire est équivalent à une rotation autour d'un point "C", appelé centre instantané de rotation. Le vecteur rotation instantanée " ω " est normal au plan de la figure, il est dirigé vers l'observateur si la rotation s'effectue dans le sens trigonométrique, et il est dirigé dans le sens opposé dans le cas inverse.

Par définition, le rayon de courbure, ici représenté par "CM", est compté positivement pour une rotation dans le sens trigonométrique, et négativement pour le sens contraire.

Soit M' une autre particule. A tout instant, dans le référentiel absolu, on a l'égalité vectorielle :

$$\vec{OM'} = \vec{OM} + \vec{MM'} \quad (1)$$

Le vecteur $\vec{MM'}$ est appelé vecteur position relative de M' par rapport à M.

En dérivant par rapport au temps l'expression (1) on peut retrouver le théorème de la composition des vitesses du point M', qui s'énonce comme suit (il s'agit de vecteurs):

vitesse absolue de M' = vitesse d'entraînement de M' + vitesse relative de M'

la vitesse d'entraînement de M' est par définition la vitesse absolue qu'aurait M' en supposant que ses projections "a" et "b" sur les axes des repères de Frenet ne dépendent pas du temps.

Une nouvelle dérivation permet de retrouver le théorème de la composition des accélérations du point M' :

accélération absolue = accélération d'entraînement + accélération relative + accélération complémentaire

L'accélération d'entraînement de M' est par définition l'accélération absolue qu'aurait M' en supposant que ses projections "a" et "b" ne dépendent pas du temps.

L'accélération complémentaire, dite de Coriolis, est égale au produit vectoriel suivant :

$$\text{accélération complémentaire} = 2 * \vec{\omega} \times \vec{vr}$$

" $\vec{\omega}$ " étant le vecteur rotation instantanée et " \vec{vr} " le vecteur vitesse relative.

Il est convenu que toutes les grandeurs sont observées et appréciées, à un instant donné, dans le référentiel du laboratoire. Il s'ensuit, en particulier, que les masses des particules suivent toujours la loi relativiste.

Matrice de transfert au premier ordre.

1. Particule de référence et groupe de particules.

Il est convenu d'appeler particule de référence une particule donnée, choisie au voisinage du centre d'un groupe de particules. La trajectoire de la particule de référence constitue l'axe optique du groupe de particules.

Le calcul de la trajectoire de référence dans le référentiel absolu, entre l'instant initial "to" et l'instant final "t", se fait par intégration des équations différentielles tirées de la formule de Lorentz :

$$\vec{F} = d(m * \vec{v}) / dt = q * (\vec{v} \times \vec{B} + \vec{E})$$

On fait appel à un calcul numérique "pas à pas" car les lois de champ magnétique et de champ électrique d'un cyclotron ne permettent pas, sauf cas particulier, d'opérer une intégration analytique.

Pour chaque particule du groupe, on procède de même. Connaissant le vecteur position et le vecteur vitesse à l'instant initial, on obtient les valeurs de ces vecteurs en fin de parcours. Le calcul est d'autant plus long que les particules sont plus nombreuses. On obtient de cette façon une représentation assez précise de l'évolution du groupe de particules.

2. Matrice de transfert au premier ordre.

Si les particules sont bien groupées, on peut admettre que leur mouvement relatif est régi par des équations qui sont des fonctions linéaires des positions et des vitesses relatives. Le comportement des particules est analogue à celui des rayons lumineux en optique classique au voisinage de l'axe optique : on néglige les aberrations. On se rappellera qu'un cyclotron, comme tout système d'optique, doit fonctionner de manière aussi linéaire que possible.

Dans cette hypothèse, le calcul des trajectoires individuelles n'est plus une nécessité. La position finale des particules peut être connue si l'on a calculé la **matrice de transfert**, commune à l'ensemble des particules, entre l'instant initial "to" et l'instant final "t".

Une matrice de transfert se présente sous la forme d'un tableau carré de coefficients numériques, ou bien encore analytiques pour des cas simples très particuliers. Ce tableau comporte autant de lignes (et de colonnes) que le nombre de coordonnées d'une particule dans l'espace des phases. Dans le cas général, le tableau comportera 6 lignes et 6 colonnes. Si l'on suppose que le mouvement axial est découplé du mouvement radial, ce tableau pourra être décomposé en deux : une matrice 2*2 pour le mouvement axial et une matrice 4*4 pour le mouvement radial.

Les coordonnées finales d'une particule se calculent très simplement. Elles sont en effet des fonctions linéaires des coordonnées initiales, les coefficients étant ceux qui figurent dans le tableau matriciel.

Si l'on a affaire à un groupe de particules, la matrice de transfert prend alors tout son intérêt. On cherchera à transporter le volume d'émittance de l'instant initial "to" à l'instant final "t", et cela pourra se faire par un simple produit matriciel, à l'aide du formalisme suivant, utilisé dans le programme "Transport" pour des particules se déplaçant sans changer d'énergie, mais qui reste valable en condition d'accélération :

$$\sigma(1) = R * \sigma(0) * R^T$$

$\sigma(0)$ est une matrice définissant l'ellipsoïde d'émittance à l'instant initial "to",

R est la matrice de transfert au premier ordre, commune à l'ensemble des particules,

R^T est cette même matrice, mais transposée (les lignes de R^T sont les colonnes de R),

$\sigma(1)$ est la matrice définissant l'ellipsoïde à l'instant final.

3. Applications du calcul matriciel au premier ordre.

- Orbites d'équilibre : la matrice de transfert correspondant à un tour complet (on peut se contenter d'une maille si le champ est parfaitement régulier) permet le calcul du nombre d'onde, de l'adaptation dans les sous-espaces des phases, et le calcul précis des termes de couplage entre les sous-espaces du plan radial.

- Trajectoires d'injection et d'éjection des cyclotrons : tracé des enveloppes, calcul de l'ellipsoïde d'émittance adapté au niveau de la ligne d'injection, et de la matrice de transfert à l'éjection.

- Accélération : étude précise des effets spéciaux, tels que la compression de phase, de l'évolution de l'émittance en cours d'accélération.

... / ...

4. Méthode de calcul de la **matrice de transfert radiale** au premier ordre.

Le rapport interne cité en référence décrit le processus qui conduit à l'établissement des équations du mouvement relatif au premier ordre, dans le plan radial, en présence d'un champ magnétique statique, d'un champ électrique éventuellement variable en fonction du temps. Les équations sont tout-à-fait générales et ne s'appliquent pas seulement au cas d'un cyclotron. Leur intégration avec des conditions initiales appropriées fournit les coefficients de la matrice de transfert radiale. La démarche peut se résumer comme suit.

4.1. A chaque pas de calcul de la trajectoire principale, il faut calculer la valeur des 8 coefficients "Aij" des équations du mouvement relatif fonction du temps :

$$\begin{aligned}\ddot{a} &= A_{11} * a + A_{12} * \dot{a} + A_{13} * b + A_{14} * \dot{b} \\ \ddot{b} &= A_{31} * a + A_{32} * \dot{a} + A_{33} * b + A_{34} * \dot{b}\end{aligned}$$

équations dans lesquelles "a" et "b" représentent les valeurs des projections sur les axes des repères de Frenet du vecteur position relative $\overrightarrow{MM'}$, " \dot{a} " et " \dot{b} " les projections de la vitesse relative, et " \ddot{a} " et " \ddot{b} " les projections de l'accélération relative. Toutes ces grandeurs sont appréciées dans le référentiel absolu (voir le texte encadré concernant les repères mobiles de Frénet).

Par définition du mouvement relatif au premier ordre, les coefficients Aij ne peuvent pas dépendre des coordonnées de M'. Les équations ne seraient d'ailleurs plus linéaires. Les expressions analytiques de ces coefficients ne dépendent que des grandeurs physiques propres à la particule de référence M :

- rapport charge sur masse, vitesse, vitesse angulaire instantanée et sa dérivée par rapport au temps,
- induction magnétique, composantes longitudinale et transversale du champ électrique (fonctions de la phase HF s'il s'agit du champ accélérateur), et composantes longitudinales et transversales des gradients relatifs à ces vecteurs.

4.2. D'une manière générale, un système de deux équations linéaires du second ordre admet quatre solutions indépendantes. On procède donc comme suit dans l'intégration numérique des équations du mouvement relatif.

Au premier pas de calcul on résout le système d'équations, quatre fois de suite, en prenant successivement comme conditions initiales pour le point M' les valeurs indiquées ci après :

d'abord :	$a_0 = 1$	$\dot{a}_0 = 0$	$b_0 = 0$	$\dot{b}_0 = 0$,
ensuite :	$a_0 = 0$	$\dot{a}_0 = 1$	$b_0 = 0$	$\dot{b}_0 = 0$,
ensuite :	$a_0 = 0$	$\dot{a}_0 = 0$	$b_0 = 1$	$\dot{b}_0 = 0$,
enfin :	$a_0 = 0$	$\dot{a}_0 = 0$	$b_0 = 0$	$\dot{b}_0 = 1$.

Notons que ces valeurs initiales correspondent aux colonnes successives d'une matrice unitaire 4*4.

On obtient ainsi successivement les quatre colonnes de la matrice de transfert à la fin du premier pas.

Pour les pas suivants on opère de même, en prenant successivement comme valeurs initiales les valeurs correspondant aux colonnes de la matrice finale du pas précédent.

4.3. La matrice ainsi calculée définit la fonction linéaire de transfert des positions et vitesses relatives entre l'instant initial et l'instant final.

A la fin de chaque pas, comme en fin de calcul, on peut déduire de cette matrice de transfert toutes les formes usuelles de matrice de transfert. Par exemple la matrice fonction de " x , x prime, Δl , $\Delta p / p$ ". Il s'agit de transformations linéaires très simples dont on trouvera la description dans le rapport de référence.

4.4. Nous rappelons que les lois de champ doivent être des fonctions continues pendant la durée du pas élémentaire d'intégration des équations de mouvement.

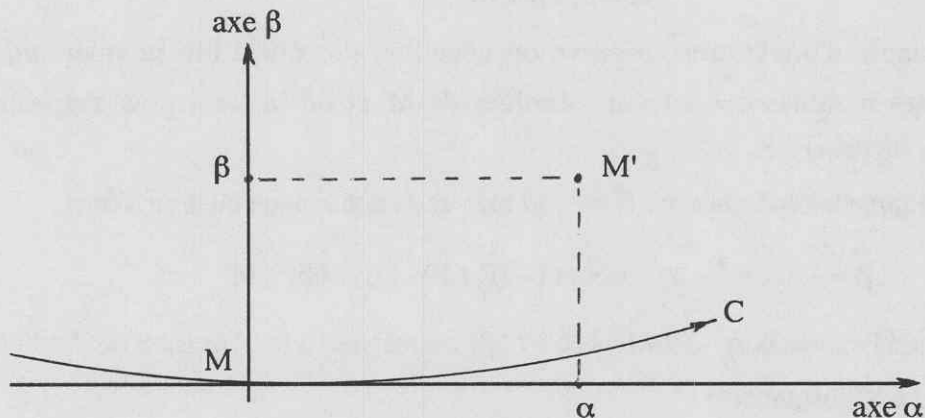
Pour les applications pratiques au cas d'un cyclotron et les tracés d'enveloppe, se référer aux rapports "GANIL R 91 11" et "GANIL R 91 12".

Référence : rapport interne "GANIL RI 89 07".

Calcul du mouvement relatif au premier ordre dans le plan radial d'un champ magnétique de révolution

La connaissance précise du mouvement relatif au premier ordre dans le plan radial d'un champ magnétique de révolution est utile si l'on veut approfondir les notions générales indiquées dans ce cours. Les calculs qui suivent sont inspirés du chapitre 2 du rapport GANIL R 89 03 1.

La figure suivante représente, pour un observateur situé dans les repères du laboratoire, et dans les coordonnées mobiles de Frenet, les positions à l'instant "t" d'une particule de référence M et d'une particule voisine "M'" se déplaçant dans le plan médian d'un champ magnétique quelconque.



"C" est la trajectoire de M, assimilable à un arc de cercle au voisinage de M.

L'axe α est orienté dans la direction du vecteur vitesse absolue de M.

L'axe β est la normale à l'axe α en M.

Soient α et β les coordonnées relatives du point M'.

Le mouvement relatif **au premier ordre**, sans accélération est défini par les équations suivantes, utilisant le temps comme paramètre (référence 2, pages 5.2 et 5.5) :

$$\ddot{\alpha} = \omega * \dot{\beta} + \dot{\omega} * \beta$$

$$\ddot{\beta} = -\omega * \gamma^2 * \dot{\alpha} + ((\gamma^2 - 1) * \omega^2 - (q/m) * v * (\delta B / \delta \beta)) * \beta$$

$\dot{\alpha}$ et $\dot{\beta}$: composantes de la vitesse relative de la particule M'.

$\ddot{\alpha}$ et $\ddot{\beta}$: composantes de l'accélération relative de la particule M'.

ω : module du vecteur rotation instantanée (avec son signe).

$\dot{\omega}$: dérivée de ω par rapport au temps.

γ : facteur relativiste correspondant à la particule de référence M, de vitesse "v".

q / m : rapport charge sur masse de la particule de référence.

$\delta B / \delta \beta$: gradient de l'induction magnétique "B", mesuré le long de la normale en M.

Ce gradient est uniforme au premier ordre, à l'instant "t".

Anticipant ce qui suit, nous définirons "R" comme étant la valeur du *rayon de courbure* instantané de la trajectoire en M. La définition du rayon de courbure implique que R soit toujours du signe de ω .

La convention de signe concernant B fait que R et B sont toujours de signes opposés.

La première équation s'intègre une première fois :

$$\dot{\alpha} = \omega * \beta + \delta v$$

δv , constante d'intégration, positive ou négative, s'identifie (au premier ordre) avec la différence des modules des vitesses absolues de M' et de M, ceci pour respecter la loi de conservation de l'énergie.

Si l'on se rappelle que : $\omega = v / R = - (q / m) * B$, la deuxième équation s'écrit :

$$\ddot{\beta} = - \omega * \gamma^2 * \delta v - \omega^2 * (1 - (R / B) * (\delta B / \delta \beta)) * \beta$$

Notons que l'expression $-(R / B) * (\delta B / \delta \beta)$ correspond à la définition de l'indice de champ "n" au point M à l'instant "t" :

$$n = - (R / B) * (\delta B / \delta \beta)$$

Nous ferons à partir de maintenant l'hypothèse que nous avons affaire à **un champ magnétique de révolution**, et que la particule de référence décrit autour du centre une trajectoire circulaire, de rayon R.

L'indice de champ "n" est alors constant le long de la trajectoire de M.

$$n = - (R / B) * (dB / dR)$$

La deuxième équation s'écrit donc :

$$\ddot{\beta} = - \omega * \gamma^2 * \delta v - \omega^2 * (1 - n) * \beta$$

Les solutions des deux équations différentielles linéaires sont les suivantes :

$$\beta = C * \sin (- \omega * \text{sqrt} (1 - n) * t + \phi_0) - (\gamma^2 * \delta v) / (\omega * (1 - n))$$

$$\alpha = D * \cos (- \omega * \text{sqrt} (1 - n) * t + \phi_0) + (1 - \gamma^2 / (1 - n)) * \delta v * t + \alpha_c$$

Le symbole "sqrt ()" représente la racine carrée.

$$D = C / \text{sqrt} (1 - n).$$

C, ϕ_0 , α_c , sont des constantes d'intégration.

L'examen des solutions conduit aux remarques suivantes :

1. Cas général.

Le mouvement du point M' est une trochoïde dont l'axe de progression est parallèle à l'axe longitudinal (axe α). Le dégroupement dans le sens longitudinal est proportionnel au temps, et à l'écart des vitesses absolues δv , supposé non nul dans le cas général.

L'ordonnée β du point M' oscille autour de l'ordonnée moyenne ayant pour valeur :

$$- (\gamma^2 * \delta v) / (\omega * (1 - n))$$

cette ordonnée correspond à celle de l'orbite d'équilibre de M'.

La vitesse angulaire du mouvement sinusoïdal de la particule M', soit :

$$- \omega * \text{sqrt} (1 - n)$$

rapportée à la vitesse angulaire ω de rotation de M dans le champ magnétique, constitue le nombre d'onde radial v , qui est toujours compté positivement.

$$v = \text{sqrt} (1 - n)$$

Cette oscillation affecte le mouvement relatif transversal et le mouvement relatif longitudinal, qui sont en quadrature.

Revenons maintenant à la dérive longitudinale, qui est définie par le terme suivant de la coordonnée α :

$$+ (1 - \gamma^2 / (1 - n)) * \delta v * t$$

et examinons l'influence de l'indice de champ "n" sur le signe de ce terme, donc sur le sens de la dérive.

Sur le plan général, deux configurations sont possibles :

première configuration : $1 - n < \gamma^2$

Prenons, par exemple, des particules ayant un excédent de vitesse " δv ". Ces particules vont osciller autour d'une orbite d'équilibre extérieure à celle de la trajectoire de référence, comme c'est normal, mais vont prendre du retard par rapport à la particule de référence.

deuxième configuration : $1 - n > \gamma^2$

les mêmes particules que les précédentes vont osciller pareillement autour d'une orbite d'équilibre extérieure à celle de la trajectoire de référence, mais vont prendre de l'avance sur la particule de référence.

(On notera ces propriétés, fondamentales dans l'étude des accélérateurs circulaires qui ne fonctionnent pas de manière isochrone).

Plaçons-nous maintenant dans la configuration particulière correspondant à un **champ magnétique isochrone**.

Un champ isochrone est caractérisé par la relation :

$$1 - n = \gamma^2$$

[Cette relation peut se démontrer simplement, en partant de la loi de champ isochrone qui s'écrit : $B = B_0 * \gamma$. On procède en différentiant B par rapport au rayon R , sachant que le coefficient relativiste γ peut s'exprimer en fonction du rayon R à l'aide de la relation : $v = \omega * R$, dans laquelle ω est une constante. On rappelle que : $n = - (R / B) * (dB / dR)$.]

Du fait que $1 - n = \gamma^2$, le terme de dérive longitudinale est identiquement nul.

Il n'y a donc pas de dégroupement en fonction du temps, bien que M' ait une énergie différente de celle de M (δv non nul).

Le point M' décrit une ellipse d'excentricité γ , centrée sur le point d'abscisse fixe α_c situé sur l'orbite d'équilibre correspondant à l'écart de vitesse δv . Le nombre d'onde commun aux oscillations transversale et longitudinale devient alors :

$$v = \gamma$$

L'orbite d'équilibre de M' se trouve à l'ordonnée $\beta = - R * \delta v / v$. Rappelons les conventions de signe dans les formules : le rayon R est toujours du signe de ω , et le signe de β est donné par l'orientation du dièdre de Frenet. A une variation positive de β correspond toujours une variation négative de R .

2. Cas particulier où les particules M et M' sont monochromatiques : $\delta v = 0$.

(Ce cas est théorique, les particules n'ayant jamais exactement la même énergie dans la pratique).

Le terme de dérive longitudinale devient identiquement nul, que le champ magnétique soit isochrone ou non.

Il n'y a donc pas de dégroupement en fonction du temps dans ce cas théorique de particules monochromatiques.

La particule M' décrit dans le plan relatif une ellipse centrée sur le point d'abscisse fixe α_c situé sur l'orbite d'équilibre commune (qui est l'axe α lui-même).

Le nombre d'onde est : $v = \text{sqrt}(1 - n)$

Références :

1 - "Calcul au premier ordre des termes de couplage et de la matrice faisceau adaptée dans le cas général d'un cyclotron isochrone" Rapport GANIL R 89 03.

2 - "Aide-mémoire pour le calcul de la matrice radiale au premier ordre par méthode vectorielle" Rapport interne GANIL RI 89 07.

Cette annexe contient la copie des références n° 4 à 18 du cours cité ci-dessous.

Les documents trop volumineux (11, 14, 17, 18) ne pouvant pas être reproduits en entier, on en a conservé les pages initiales et finales, qui contiennent le résumé, les conclusions et les références qui se rattachent à ces publications. D'autre part, on a inclus la référence de G.Hinderer rattachée à la référence 5.

Les cyclotrons

J. Fermé

Ecole " Introduction à la dynamique des faisceaux et aux accélérateurs de particules "

I.N.2.P.3. Formation permanente.

25.4.1963

A PROPOS DE L'INFLUENCE SUR L'ISOCRONISME D'ESPACES D'ACCELERATION A
CONFIGURATION SPIRALE DANS UN CYCLOTRON

P. Lapostolle

1) Introduction

Dans les cyclotrons isochrones à focalisation spirale il peut être avantageux de disposer les électrodes ou les cavités d'accélération dans les "vallées". Elles ont ainsi une configuration spirale.

Il en résulte :

1°) qu'entre deux orbites successives, au cours de l'accélération, une particule ne parcourt pas exactement un tour pour repasser à la même électrode ou à la même cavité;

2°) que le champ accélérateur possède une composante radiale qui perturbe les orbites, les allongeant ou les raccourcissant suivant le sens de la spiralisation par rapport au sens de rotation des particules.

On peut se demander si ces effets n'altèrent pas l'isochronisme des révolutions et si, pour le conserver, il n'est pas nécessaire de modifier la distribution de champ magnétique. On peut se demander aussi si de tels effets ne sont pas susceptibles d'introduire un mécanisme de stabilité de phase¹⁾.

On va montrer que les deux effets cités ci-dessus se compensent exactement de telle sorte que les propriétés du cyclotron isochrone ne sont en rien modifiées par l'emploi de cavités ou électrodes à configuration spirale.

On indiquera aussi un moyen de réaliser le premier effet indépendamment du second. L'isochronisme ne sera alors conservé que moyennant une correction de champ.

1) Ces quelques notes résument des réflexions dont l'origine remonte à des discussions avec les membres de l'"Electronuclear Division" d'Oak Ridge National Laboratory en Avril 1962 et le Dr. N. Vogt-Nilsen.

2) Effet de la spiralisation sur la longueur séparant deux passages au même espace d'accélération

Considérons la figure 1. Soient deux orbites successives (d'ordre n et $n + 1$) passant en M et M' au même espace accélérateur. Désignons par Δr la distance MN séparant les orbites. La longueur $NM' = \Delta l$ représente l'écart par rapport à un tour. Si ϑ est l'angle de la spirale avec le rayon vecteur OM , on a

$$\Delta l = \Delta r \operatorname{tg} \vartheta \quad (1)$$

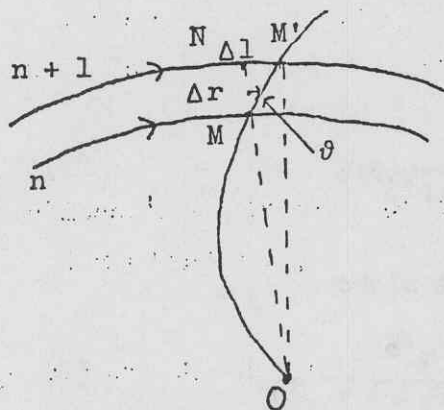


Fig. 1

Nous allons calculer Δr .

Désignons par h le nombre d'espaces d'accélération par tour et par V la différence de potentiel existant aux bornes des espaces d'accélération au moment du passage des particules sur l'orbite de rang n considérée. On suppose ici que les h espaces d'accélération sont identiques et en phase. Il ne serait pas difficile de lever cette restriction et on considérera d'ailleurs plus loin un exemple où la supposition n'est pas vérifiée.

Le gain d'énergie de M à N est donc

$$h e V \cos \vartheta,$$

et la variation Δp de quantité de mouvement p est, au premier ordre, en désignant par m_0 la masse au repos des particules et c la vitesse de la lumière

$$\Delta p = h e V \cos \vartheta \frac{\sqrt{m_0^2 c^2 + p^2}}{pc} \quad (2)$$

Or, dans un cyclotron isochrone, le rayon moyen r d'une orbite est lié à la vitesse v des particules et à la fréquence f_0 de révolution par la relation

$$r = \frac{v}{2\pi f_0} \quad , \quad (3)$$

d'où l'on déduit

$$r = \frac{cp}{2\pi f_0 \sqrt{m_0^2 c^2 + p^2}} \quad . \quad (4)$$

On a donc

$$\Delta r = \frac{c}{2\pi f_0} \frac{m_0^2 c^2}{(m_0^2 c^2 + p^2)^{3/2}} \Delta p \quad . \quad (5)$$

De (1), (2) et (5) on déduit alors

$$\Delta l = \frac{h e V \sin \theta}{2\pi f_0} \frac{m_0^2 c^2}{p(m_0^2 c^2 + p^2)} \quad . \quad (6)$$

3) Allongement des orbites dû à la composante radiale du champ accélérateur

A chaque passage d'un espace d'accélération, les particules reçoivent une quantité de mouvement transversale égale à $eV \sin \theta / v$. Par tour, elles reçoivent donc une quantité de mouvement transversale δp telle que

$$\delta p = \frac{h e V \sin \theta}{v} \quad . \quad (7)$$

A cette quantité de mouvement correspond une déviation angulaire

$$\delta \alpha = \frac{\delta p}{p} \quad . \quad (8)$$

D'après (7) et (8), on a

$$\delta\alpha = \frac{h e V \sin\theta}{p^2 c} \sqrt{m_0^2 c^2 + p^2}, \quad (9)$$

où, dans le cas de la figure (1), $\Delta\alpha$ correspond à une augmentation de la rotation produite par le champ magnétique.

Pour que, pour un tour, la rotation soit de 2π , l'orbite fermée doit donc être déplacée d'une quantité δr négative. Et la fermeture sera assurée sur le rayon moyen²⁾ correspondant à une orbite de quantité de mouvement, en l'absence de champ accélérateur radial, $p + \Delta p$ telle que

$$\frac{\Delta p}{p} = - \frac{\delta\alpha}{2\pi}. \quad (10)$$

D'après (5), (9) et (10) on a donc

$$\delta r = - \frac{h e V \sin\theta}{4\pi^2 f_0} \frac{m_0^2 c^2}{p(m_0^2 c^2 + p^2)}, \quad (11)$$

et le raccourcissement δl d'orbite est :

$$\delta l = - \frac{h e V \sin\theta}{2\pi f_0} \frac{m_0^2 c^2}{p(m_0^2 c^2 + p^2)} \quad (12)$$

2) En réalité, la forme exacte des orbites perturbées dépend de la position des espaces accélérateurs par rapport à la maille de la focalisation. L'orbite fermée que l'on calcule est formée de tronçons qui correspondent à des éléments d'orbites exécutant des oscillations bétatroniques. Le raisonnement ne s'applique qu'à la moyenne du rayon r .

4) Conclusions

On voit immédiatement que $\delta l = -\Delta l$. Les deux effets se compensent exactement. La configuration spiralée des espaces accélérateurs déplace les orbites, mais l'isochronisme reste assuré sans qu'il soit nécessaire de modifier la distribution du champ magnétique.

Il est intéressant de noter un moyen de réaliser l'effet étudié sous 2) en évitant le déplacement d'orbite δr calculé en 3).

Conformément à une suggestion étudiée à Oak Ridge National Laboratory, on peut employer des cavités accélératrices radiales avec un champ électrique stationnaire présentant des noeuds et des ventres.

On pourrait imaginer disposer deux groupes de telles cavités dans lesquels des séries de noeuds et de ventres seraient décalés dans l'espace d'un quart de période (voir figure 2), le champ accélérateur restant cependant en phase pour les particules. Il est possible de réaliser ainsi un champ tournant dont les maxima se distribuent sur une spirale, comme indiqué schématiquement en tirets sur la figure.

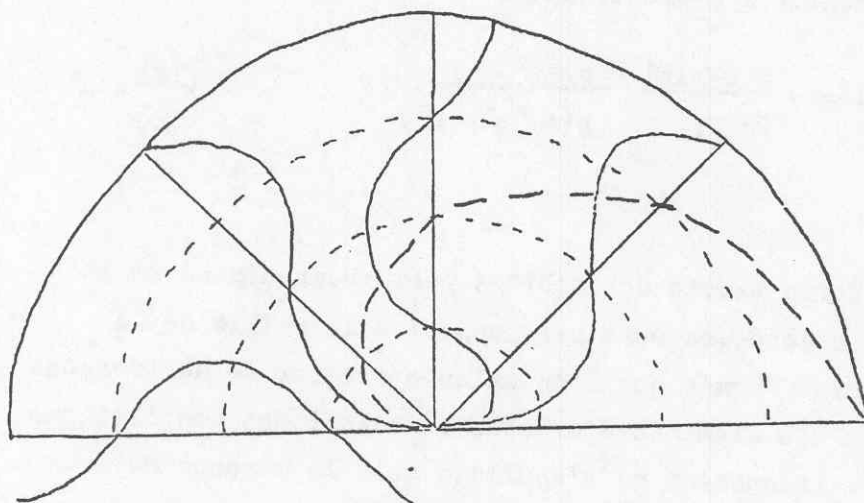


Fig. 2

Evidemment ce champ ne possède aucune composante radiale.

Pour assurer l'isochronisme, il faut alors corriger la distribution de champ magnétique.

Si le champ magnétique n'est pas corrigé, l'isochronisme n'est plus assuré. Il est encore possible d'accélérer en introduisant une légère modulation de fréquence qui compense la variation de période de révolution due à l'allongement Δl donnée en (6). Il y aura alors stabilité de phase, comme dans un synchro-cyclotron.

PARAMETERS OF THE EIGENELLIPSOID FOR SEPARATED SECTOR CYCLOTRONS

J. Fermé

GANIL, B.P. 5027, 14021 CAEN, FRANCE

ABSTRACT

The analytical expressions of the elements of the beam matrix corresponding to the eigenellipsoid for a beam injected on an equilibrium orbit of a cyclotron are presented. The four dimensional phase space of the horizontal plane is only considered. Some restrictive hypotheses are made: there is no acceleration, and space charge effects are not taken into account. The beam matrix has been computed for the general case of spiraled sectors cyclotrons, and is valid for any given azimuth.

1. INTRODUCTION

The problem of beam matching at the injection into a separated sector cyclotron has been solved with a good approximation by many authors. We will mainly make reference to the well documented publication of G. Hinderer.¹⁾

There exist presently computer programs which give with a great accuracy the numerical value of the elements of the transfer matrix corresponding to an equilibrium orbit for a given magnetic field map. Incidentally, these programs work also if acceleration is present. This opens the possibility of computing accurately the elements of the beam matrix of the eigenellipsoid corresponding to a given equilibrium orbit.

We have undertaken such a study for the horizontal plane²⁾. The problem in the vertical plane, supposed uncoupled, is straight-forward and will not be discussed.

By definition, the eigenellipsoid must recover its original characteristics after one complete revolution along an equilibrium orbit. This definition can be written, using the formalism of program TRANSPORT as follows:

$$R \cdot \sigma_E \cdot R^T = \sigma_E \quad (1)$$

where R represents the transfer matrix for one revolution along a given equilibrium orbit, R^T the transpose of R , and σ_E the eigenellipsoid beam matrix.

The same formula applies to any individual section of a cyclotron composed of N identical sections, R being in this case the transfer matrix corresponding to one section.

In addition to the R_{ij} elements of the transfer matrix R , the following parameters of the ellipsoid are supposed to be given:

- ϵ , which determines the transverse emittance $\pi \epsilon$
- z_0 , the value of the longitudinal extension of the ellipsoid, should the longitudinal emittance be represented by an upright ellipse
- δ_0 , the momentum dispersion

2. SOLVING THE PROBLEM

Solving equation (1) in the four dimensional phase space x, θ, z, δ is not straightforward and laborious developments can be avoided using the following guide line. Firstly the approach of the four dimensional problem must be progressive. The two dimensional problem x, θ being solved, the third dimension z can then be introduced, observing that the elements of the beam matrix for the two dimensional phase space do not include any R_{3j} element of the transfer matrix. Secondly, in this progressive approach, the following formula, to be commented in the next paragraph, should be used in conjunction with formula (1) to help solve easily the four dimensional problem:

$$\sigma_E = C \cdot \sigma_0 \cdot C^T \quad (2)$$

From a general point of view, some remarks can be made. Equation (1) leads to a system of 10 elementary equations to be solved to get the expressions of the 10 elements of the beam matrix.

In fact, these equations depend on a total of 8 independent parameters: the 3 above mentioned parameters ϵ, z_0, δ_0 , plus 5 parameters for the transfer matrix R . Normally, matrix R includes 9 different parameters, but there are between these parameters 3 symplectic relations and one relation for isochronism. Consequently, one must be aware

that some degree of redundancy is inherent in the set of the 10 equations.

3. THE FOUR DIMENSIONAL BEAM MATRIX

The solution for the four dimensional eigenellipsoid beam matrix is presented as follows, according to formula (2) and is valid for a spiraled sectors cyclotron, at any given azimuth on an equilibrium orbit:

$$\sigma_e = \begin{matrix} & C & & \sigma_0 & & C^T \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & C_{14} \\ 0 & 1 & 0 & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & 1 & C_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & * & \begin{bmatrix} S_{11} & S_{21} & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_0^2 \end{bmatrix} & * & \begin{bmatrix} 1 & 0 & C_{31} & 0 \\ 0 & 1 & C_{32} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

σ_0 is a beam matrix in which S_{ij} 's are the elements of the matrix of the eigenellipsoid in the x, θ phase space if $\delta_0 = 0$

C is a symplectic transfer matrix. Consequently:

$$C_{14} = C_{32} \quad C_{24} = -C_{31}$$

C^T is the transpose of C

The R_{ij} elements of the transfer matrix R being known, the elements of matrices σ_0 and C are expressed as follows:

$$S_{11} = S_{21} \cdot 2 \cdot R_{12} / (R_{22} - R_{11})$$

$$S_{22} = S_{21} \cdot 2 \cdot -R_{21} / (R_{22} - R_{11})$$

$$S_{21}^2 = \epsilon^2 \cdot (R_{22} - R_{11})^2 / (4 - (R_{22} + R_{11})^2)$$

S_{21}^2 must remain positive, this establishes the criterion of stability in the x, θ phase space: $(R_{22} + R_{11})^2 < 4$. The sign to be taken for S_{21} is the one which makes S_{11} and S_{22} positive, because all S_{ij} elements of the beam matrix are positive by definition.

$$C_{24} = -C_{31} = (R_{31} \cdot (1 - R_{22}) + R_{21} \cdot R_{32}) / (2 - (R_{22} + R_{11}))$$

$$C_{14} = C_{32} = (-R_{32} \cdot (1 - R_{11}) - R_{12} \cdot R_{31}) / (2 - (R_{22} + R_{11}))$$

C_{34} is found to be a free parameter. Its position in the C matrix shows that this element is related to the tilt of the eigenellipsoid in the longitudinal phase space. The value zero for C_{34} corresponds to an upright ellipsoid. This condition gives the smallest beam envelope longitudinally and must be selected in order to minimize the aberrations caused by the accelerating system. But, to the first order, there are theoretically no constraints on the value of C_{34} which remains a free parameter.

It seems obvious that the longitudinal confinement cannot be achieved if the magnetic field is not isochronous, the definition of an isochronous magnetic field being expressed by the statement that all equilibrium orbits have the same revolution frequency. But, from a formal point of view, the necessity of an isochronous field cannot be introduced as an hypothesis.

Actually, when solving the system of equations (1), the condition to be fulfilled for ensuring the existence of a longitudinal beam envelope is found to be:

$$-R_{32} \cdot C_{31} + R_{31} \cdot C_{32} + R_{34} = 0$$

and this condition, which involves the element R_{34} of the transfer matrix, appears to be identical to the condition of isochronism for the magnetic field:

$$-R_{14} \cdot C_{31} - R_{24} \cdot C_{32} + R_{34} = 0$$

It can also be noted that the C_{ij} elements of transfer matrix C represent intrinsically the various couplings involving the longitudinal coordinates of individual particles in a matched beam.

4. SINGULAR AZIMUTH FOR SPIRALED SECTORS CYCLOTRONS

If the starting (and also final) point for the computation of the transfer matrix R is moved along the equilibrium orbit, the R_{ij} elements become variable. They behave as periodic functions of the azimuth of the starting point, the period being $2\pi/N$ if the cyclotron is composed of N identical elementary sections. By convention, the first section begins at the starting point. As far as elements R_{11} and R_{22} are concerned, their sum remains constant because the betatron phase shift μ over one revolution does not depend on the choice of the starting point:

$$R_{11} + R_{22} = 2 \cdot \cos \mu$$

From the above statements, and with the help of the first order optical model applied to each section, it can be shown that functions R_{11} and R_{22} do intersect, and they do this $2N$ times during one complete revolution. The intersection points, where $R_{11} = R_{22}$, have no other peculiar geometric location, except that they form two series of equidistant points along the equilibrium orbit. Their position should be found by numerical computation, using an iterative process.

The eigenellipsoid matrix computed at any intersection point ($R_{11} = R_{22}$) has the same expression as in the general case except for the S_{ij} elements which become:

$$S_{11} = \epsilon \cdot \text{SQRT}(-R_{12}/R_{21})$$

$$S_{22} = \epsilon \cdot \text{SQRT}(-R_{21}/R_{12})$$

$$S_{21} = 0$$

5. THE CASE OF CYCLOTRONS WITH SYMMETRIC SECTORS

The above mentioned intersection points for functions R_{11} and R_{22} are located on the $2N$ symmetry axes of a cyclotron having N identical "straight" sectors.

For any of these points, the S_{ij} elements have the same expressions as mentioned in the preceding paragraph.

In addition, the solution of the set of equations (1) gives:

$$C_{24} = -C_{31} = 0$$

$$C_{14} = C_{32} = R_{31}/R_{21}$$

It can be observed on practical cases that the expression r_0/γ^2 proposed by G. Hinderer is quite close (a few per cent) to the expression C_{32} .

The isochronism relation is thus:

$$R_{31}^2/R_{21} + R_{34} = 0$$

and due to the symmetry of the magnetic field matrix:

$$R_{31} = -R_{24} \text{ and } R_{32} = -R_{14}.$$

6. CONCLUSION

We have established the analytical expression of the parameters of the eigenellipsoid corresponding to a given equilibrium orbit of a cyclotron, in the four dimensional horizontal phase space. The method does not apply to the case of an accelerated beam. However, as far as the radial gain per turn remains small in comparison with the mean radius of rotation, the parameters of the eigenellipsoid computed for the equilibrium orbit can be used conveniently. This has been confirmed by numerical computation of beam envelopes in presence of acceleration. To extend the principle of the method to an accelerated beam will require first, to formulate the definition of a matched beam in presence of acceleration. Moreover, it should be noted that in most practical cases there exists a lack of symmetry between the magnetic field and the accelerating system (for instance: 4 magnetic sectors and 2 RF resonators), resulting in a slight imbalance of the turn pattern. Under these circumstances the concept of a well matched beam becomes even more complex to formulate rigorously.

- 1) Hinderer, G. "Phase space matching between preaccelerators and cyclotrons," in Proceedings of the Ninth Conference on Cyclotrons and their Applications, 1981, pp. 327-335.
- 2) Fermé, J. GANIL internal report, R.89-03, February 7, 1989

6

PHASE-SPACE MATCHING BETWEEN PRE-ACCELERATORS AND CYCLOTRONS

G. Hinderer

Physik-Department, Technische Universität München, D-8046 Garching.

Abstract.- The properties of the six-dimensional eigenellipsoid of the circulating pulses on a cyclotron orbit are derived. Design features for beam line systems are presented which match a pre-accelerated beam of ions to this phase space. Possibilities are discussed for optimizing the setting parameters.

1. Introduction.- In a cyclotron with internal source the beam normally is accelerated with a rather broad phase width. Although it is possible to use phase selecting slits, in general only multiturn extraction out of the cyclotron can be achieved - with a rather moderate beam quality.

When injecting a pre-accelerated beam into a booster cyclotron, it is possible to match the beam in such a way that it fills an optimal region of the phase space acceptance of the cyclotron, resulting in a high beam quality with well separated turns during acceleration and single turn extraction. In this article first the phase space conditions for optimal acceleration in the cyclotron are derived. Afterwards we ask for criterions for beam line systems between the pre-accelerator and the cyclotron which achieve these conditions. Only radial injection is considered. In the third part we look for possibilities for checking the correct phase space matching.

2. Phase space conditions for acceleration in a booster-cyclotron.- When injecting a pre-accelerated beam of ions into a cyclotron, we must define a location along the beam path where we consider the injection process as finished and the acceleration in the cyclotron just starting. At this breakpoint the phase space of the particles should be matched properly. It is reasonable to use for that a symmetry point of the cyclotron orbit behind the last injection element (e.g. one of the first mid-valley points after injection). The central trajectory of the beam at this breakpoint is defined by a particle on the static equilibrium orbit with the central momentum p_0 , just passing the symmetry point*). In vertical direction it is positioned in the midplane of the cyclotron. Particles deviating from the central tra-

jectory are described by the six-dimensional vector

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \theta \\ y \\ \varphi \\ z \\ \delta \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{radial (horizontal) displacement} \\ \text{radial (") angle} \\ \text{vertical displacement} \\ \text{vertical angle} \\ \text{longitudinal displacement} \\ \text{longitudinal angle = longitudinal} \\ \text{momentum deviation } \frac{\Delta p_z}{p_0} \end{array} \quad (1)$$

The associated coordinate system is right-handed rectangular with its origin coinciding with the central particle. We choose clockwise motion in the cyclotron, so that the positive x-axis points radially outwards, the positive y-axis upwards, and the z-axis has the direction of the central momentum p_0 . This is illustrated in Fig. 1.

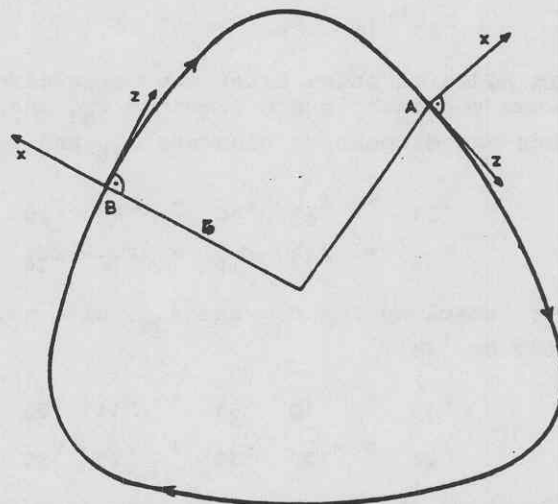


Fig. 1 : The coordinate system for the particle motion around a static equilibrium orbit. At point B the x-axis is in line with the radius which is referred to being a symmetry point.

*) In the limit of small turn separation compared with the injection radius the matching conditions for the accelerated orbits are practically the same as those for the closed static equilibrium orbit.

101

With this convention we adopt the description of TRANSPORT¹⁾, which will be used also for the beam line system between the pre-accelerator and the cyclotron.

We now want to look for the correlations between the six coordinates of any particle in the beam inside an isochronous cyclotron. We consider only linear correlations, since the size of the beam is normally very small compared to the orbit radius.

For particles oscillating around the static equilibrium orbit the cyclotron is just a magnetic beam line system with midplane symmetry. The general form of the transformation matrix for such a system is given by

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & 0 & 0 & 0 & r_{16} \\ r_{21} & r_{22} & 0 & 0 & 0 & r_{26} \\ 0 & 0 & r_{33} & r_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_{34} & r_{44} & 0 & 0 \\ r_{51} & r_{52} & 0 & 0 & 1 & r_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

and the particle vectors are transformed through the system

$$\text{by } \vec{X}(1) = R \cdot \vec{X}(0) \quad (3)$$

According to Liouville's theorem the determinant of the total matrix R equals one. Caused by the midplane symmetry and conservation of momentum in magnetic fields the determinants of the horizontal and vertical submatrices are also one:

$$\begin{aligned} \det R &= 1 \\ r_{11} r_{22} - r_{12} r_{21} &= 1 \\ r_{33} r_{44} - r_{34} r_{43} &= 1 \end{aligned} \quad (4)$$

In addition there exist two correlations between the path-length elements r_{51} and r_{52} and the dispersive elements r_{16} and r_{26} :

$$\begin{aligned} r_{51} &= r_{21} \cdot r_{16} - r_{11} \cdot r_{26} \\ r_{52} &= r_{22} \cdot r_{16} - r_{12} \cdot r_{26} \end{aligned} \quad (5)$$

or, resolved for r_{16} and r_{26} , with help of the eq. (4):

$$\begin{aligned} r_{16} &= -r_{12} \cdot r_{51} + r_{11} \cdot r_{52} \\ r_{26} &= -r_{22} \cdot r_{51} + r_{21} \cdot r_{52} \end{aligned} \quad (5')$$

Equation (5) can be found when looking for the integral form of the matrix elements²⁾. We now consider R being the transfer-matrix for one orbit, starting at a symmetry point of the cyclotron. If the symmetry of the

cyclotron is N , there are $2N$ such symmetry points on the orbit where the radius vector is rectangular to the momentum of the central particle, and the x -axis of the associated coordinate system is in line with the radius. In case the cyclotron has no spiral angle (straight sector cyclotron), one total orbit can be interpreted as the path through a magnetic system for half an orbit, followed by the mirror reflected system. As a consequence of this symmetry property we get for zero spiral angle the additional relation³⁾:

$$r_{11} = r_{22} \text{ and } r_{33} = r_{44} \quad (6)$$

Let us now use the fact that we have an isochronous orbit. The radius of the central particle at the azimuth of the choosen symmetry point is r_0 , its momentum p_0 . For a particle with a slightly higher momentum

$$p = p_0 (1 + \frac{\Delta p}{p_0}) = p_0 (1 + \delta) \quad (7)$$

there exists also a closed orbit (static equilibrium orbit) at the radius

$$\begin{aligned} r &= r_0 + p_0 \cdot \left. \frac{\partial r}{\partial p} \right|_{p_0} \cdot \frac{\Delta p}{p_0} \\ &= r_0 + \tilde{r} \cdot \delta \end{aligned} \quad (8)$$

with the reduced radius^{*)}

$$\begin{aligned} \tilde{r} &= r_0 \cdot \frac{\gamma}{\gamma + \beta^2 \gamma^3} \\ \text{noter que } \gamma^2 &\equiv 1 + \beta^2 \gamma^2 \\ \text{d'où} \\ \tilde{r} &= \frac{r_0}{\gamma^2} \end{aligned} \quad (9)$$

$$\beta = \frac{v(r_0)}{c}; \quad \gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$$

This particle, deviating from the central particle only in its momentum and radial

*) This equation can be derived using the relations:

$$\tilde{r} = p_0 \cdot \left. \frac{\partial r}{\partial p} \right|_{p_0}$$

$$\frac{\partial r}{\partial p} = \frac{\partial r}{\partial v} / \frac{\partial p}{\partial v}; \quad \frac{\partial r}{\partial v} = \frac{r}{v} \quad \text{in an isochronous field.}$$

$$\frac{\partial p}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v} (m_0 \cdot \gamma(v) \cdot v) = m_0 (\gamma + v \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial v})$$

$$v \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial v} = \beta \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial \beta} = \beta^2 \cdot \gamma^3$$

position coordinates, must be transferred identically by the matrix R:

$$R \cdot \begin{bmatrix} \tilde{r} & \delta \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{r} & \delta \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \delta \end{bmatrix} \quad (10)$$

The coordinate $x_5 = z$ remains zero because the orbit shall be isochronous. Inserting eq (2) and using the relations (4) and (5) we get the general form of the transfer-matrix for an isochronous cyclotron orbit (now r_{ij} replaced by c_{ij}):^{*})

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 & \tilde{r}(1-c_{11}) \\ c_{21} & c_{22} & 0 & 0 & 0 & -\tilde{r}c_{21} \\ 0 & 0 & c_{33} & c_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{34} & c_{44} & 0 & 0 \\ \tilde{r}c_{21} & -\tilde{r}(1-c_{22}) & 0 & 0 & 1 & -\tilde{r}^2 c_{21} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

with $c_{11} c_{22} - c_{12} c_{21} = 1$ and $c_{33} c_{44} - c_{34} c_{43} = 1$

For zero spiral angle we have in addition

$$c_{11} = c_{22} \quad \text{and} \quad c_{33} = c_{44} \quad (12)$$

2.1. The uncoupled subspaces

There are no elements in the matrix C which couple the vertical coordinates $x_3 = y$ and $x_4 = \psi$ to any other element of the particle vector. This means that the vertical motion of the particles is (to first order) independent from the horizontal and the longitudinal motion. Let us for the moment only consider particles with the central momentum p_0 ($\delta = 0$). Then also the horizontal motion is governed by its own submatrix c_{ij} , $i = 1, 2$; $j = 1, 2$ (although the longitudinal coordinate z is influenced by horizontal matrix elements!)

If the orbits around the equilibrium orbit are stable, then the absolute values of the traces of the horizontal and vertical submatrices are less than two, the betatron -

oscillation frequencies are real and can be calculated from the matrix elements:

$$v_x = n + \text{sign}(c_{12}) \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \arccos \left\{ \frac{1}{2} \cdot (c_{11} + c_{22}) \right\} \quad (13)$$

$$v_y = m + \text{sign}(c_{34}) \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \arccos \left\{ \frac{1}{2} \cdot (c_{33} + c_{44}) \right\} \quad (14)$$

The frequencies are determined only up to the integer numbers n and m .

The matrix C tells us how single particles around the equilibrium orbit are transformed. The phase space of a whole bundle of particles forming one circulating pulse in the cyclotron may well be described as a volume confined in a six-dimensional ellipsoid. Vectors \vec{X} for particles on the surface of this ellipsoid are given by the equation¹⁾

$$\vec{X}^T \cdot \sigma^{-1} \cdot \vec{X} = 1 \quad (15)$$

where σ is a 6×6 matrix describing the beam. The diagonal element σ_{ii} is the square of the maximum extension (envelope) of the beam in the coordinate x_i :

$$\sigma_{ii} = (\pm x_i(\max))^2 \quad (16)$$

and the off-diagonal element $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, $i \neq j$ represents the tilt of the phase ellipse which one gets as a projection of the ellipsoid on the $(x_i - x_j)$ plane. $\sigma_{ij} = \sigma_{ji} = 0$ represents an upright ellipse (waist) in the $(x_i - x_j)$ plane, with the half-axes $\sqrt{\sigma_{ii}}$ and $\sqrt{\sigma_{jj}}$.

In a beam line system represented by the transfer matrix R an initial beam given by the matrix $\sigma(0)$ is transformed by¹⁾

$$\sigma(1) = R \cdot \sigma(0) \cdot R^T \quad (17)$$

The injected beam pulses are matched properly if their occupied phase space is the same after one revolution in the isochronous cyclotron field.

$$\sigma(1) = C \cdot \sigma(0) \cdot C^T = \sigma(0) \quad (18)$$

For the horizontal and vertical subspaces this determines the shape of the eigen-ellipses. For zero spiral angle due to eq.(12) these eigenellipses are upright, and the ratio of their half-axes can be found to be

$$(\sigma_{11}/\sigma_{22})^{1/2} = x_{\max}/y_{\max} = (-c_{12}/c_{21})^{1/2} \quad (19)$$

and

$$(\sigma_{33}/\sigma_{44})^{1/2} = y_{\max}/\psi_{\max} = (-c_{34}/c_{43})^{1/2} \quad (20)$$

The areas of the horizontal and vertical beam emittances are given by

^{*}) The matrix C can be used also for a fraction of an orbit, which extends from one symmetry point to another one with the same radius r_0 for the central trajectory.

$$\epsilon_x = \pi \cdot x_{\max} \cdot \theta_{\max} \quad (21)$$

and

$$\epsilon_y = \pi \cdot y_{\max} \cdot \varphi_{\max} \quad (22)$$

In the longitudinal phase plane due to the isochronous field any particle with the coordinates (z, δ) is transformed identically, provided it is positioned on its equilibrium orbit $x = r \delta$

$$C \cdot \begin{bmatrix} \tilde{r} \delta \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ z \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{r} \delta \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ z \\ \delta \end{bmatrix} \quad (23)$$

Therefore any phase ellipse is an eigen-ellipse. There are, however, other criteria which determine a useful ratio z_{\max}/δ_{\max} for a given longitudinal phase space area.

Let us for a moment replace the longitudinal coordinate z by the corresponding phase deviation $\varphi_{rf} \approx z$ (not to be confused with the vertical angle φ !) and the momentum coordinate by the energy deviation $\Delta E \approx \delta$. When the bunch of particles is accelerated on top of a single frequency voltage (no flat-topping), then an originally elliptic $(\varphi_{rf}, \Delta E)$ phase plane gets a banana shape at the extraction orbit as indicated in Fig. 2. If the amplitude of the accelerating voltage (more precise, the peak energy gain per turn) is constant versus radius then the maximum phase deviation and the energy spread for $\varphi_{rf} = 0$ particles both remain constant (Fig. 2a). For a radially increasing voltage we get a phase compression during acceleration, and the phase width is decreased by the ratio of the voltage amplitudes between extraction and injection⁴⁾. The energy spread for $\varphi_{rf} = 0$ particles increases by the same factor (Fig. 2b)^{*}). Clearly the elliptic shape of the $(\varphi_{rf}, \Delta E)$ -plane at injection is best maintained by accelerating with a phase width as small as possible. For a given plane area however then the energy spread gets large and, assuming single turn extraction is still possible, one may then ask for a de-bunching system after the cyclotron. If there are no flat-topping cavities in the cyclotron, a good compromise for the shape of the longitudinal plane at extraction may be reached when the energy deviation caused by the phase width is about equal to the energy spread for $\varphi_{rf} = 0$ particles coming from the initial energy spread of the injected beam (see Fig. 2b). Knowing the transfor-

mation of the cyclotron this gives backwards an optimal ratio z_{\max}/δ_{\max} of the longitudinal phase ellipse at injection. The orientation of the ellipse should be upright.

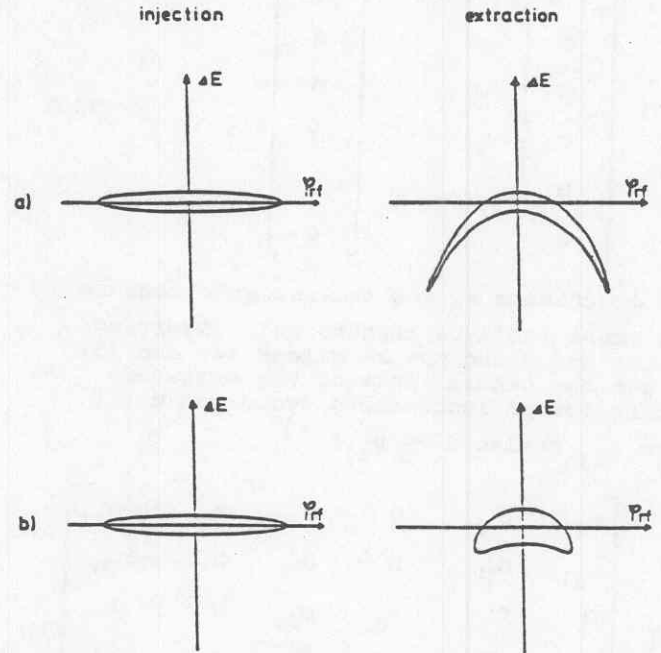


Fig. 2 : Transformation of the longitudinal phase plane through the cyclotron (schematically), a) for a constant amplitude U_0 of the accelerating voltage, b) for increasing U_0 .

^{*}) In the approximation of

$$\cos(\varphi_{rf}) \approx 1 - \frac{1}{2}(\varphi_{rf})^2 \text{ and } \sin(\varphi_{rf}) \approx \varphi_{rf}$$

the longitudinal phase space transformation between average radii r_1 and r_2 in an isochronous cyclotron with single turn extraction is given by:

$$\Delta E(r_2) = a \cdot \Delta E(r_1) + b \cdot (\varphi_{rf}(r_1))^2 \quad (24)$$

$$\varphi_{rf}(r_2) = \frac{1}{a} \cdot \varphi_{rf}(r_1)$$

with.

$$a = \frac{U_0(r_2)}{U_0(r_1)}$$

$$b = -\frac{1}{2} \cdot E_u \cdot \left(\frac{\beta(r_2)}{r_2} \right)^2 \cdot U_0(r_2) \cdot U_0^2(r_1) \cdot \int_{r_1}^{r_2} \frac{r \cdot \gamma^3(r)}{U_0^3(r)} dr$$

$$U = U_0(r) \cdot \cos(\varphi_{rf}) = \text{accelerating voltage}$$

$$E_u = 931.5 \text{ MeV} ; \beta(r) = \frac{v(r)}{c} = \frac{\beta(r_2)}{r_2} \cdot r$$

$$\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$$

2.2. Coupling between the horizontal and longitudinal phase space.

The transformation matrix C of eqn. (11) has four non-zero coefficients which correlate the horizontal and the longitudinal motion:

$$\begin{aligned} c_{16} &= \tilde{r}(1 - c_{11}) \\ c_{26} &= -\tilde{r} c_{21} \\ c_{51} &= \tilde{r} c_{21} \\ c_{52} &= -\tilde{r}(1 - c_{22}) \end{aligned} \quad (25)$$

Due to these matrix elements the x and θ coordinates of a particle vector may have contributions coming from the momentum deviation δ , and the longitudinal displacement z (or the phase φ_{rf} of the particle) is

influenced by the horizontal coordinates x and θ . Let us therefore split up the particle vector $\vec{X}(0)$ in the following way:

$$\vec{X}(0) = \begin{bmatrix} x_0 \\ \theta_0 \\ y_0 \\ \varphi_0 \\ z_0 \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x}_0 + k_1 \delta \\ \bar{\theta}_0 + k_2 \delta \\ \bar{y}_0 \\ \bar{\varphi}_0 \\ \bar{z}_0 + k_3 \bar{x}_0 + k_4 \bar{\theta}_0 \\ \delta \end{bmatrix} \quad (26)$$

The coordinates indicated by bars shall be coordinates of the eigenellipses of the three uncoupled subspaces ($\delta=0$ for the horizontal subspace; $x = \tilde{r} \cdot \delta$, $\theta = 0$ for the longitudinal subspace). Then the vector $\vec{X}(0)$ describes a particle on the surface of the six-dimensional eigenellipsoid, if the four coefficients k_1 , k_2 , k_3 and k_4 remain constant upon the transformation with the matrix C :

$$\vec{X}(1) = C \cdot \vec{X}(0) = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 + k_1 \delta \\ \bar{\theta}_1 + k_2 \delta \\ \bar{y}_1 \\ \bar{\varphi}_1 \\ \bar{z}_1 + k_3 \bar{x}_1 + k_4 \bar{\theta}_1 \\ \delta \end{bmatrix} \quad (27)$$

As the coordinates on the longitudinal eigenellipse do not change, we have in addition $\bar{z}_1 = \bar{z}_0$. Replacing the matrix C by eq. (11) and solving for the coefficients one finds:

$$\begin{aligned} k_1 &= \tilde{r} ; k_2 = 0 \\ k_3 &= 0 ; k_4 = \tilde{r} \end{aligned} \quad (28)$$

For a cyclotron with zero spiral angle the six projections of the resulting eigenellip-

soid involving the horizontal and longitudinal coordinates are sketched in Fig. 3.

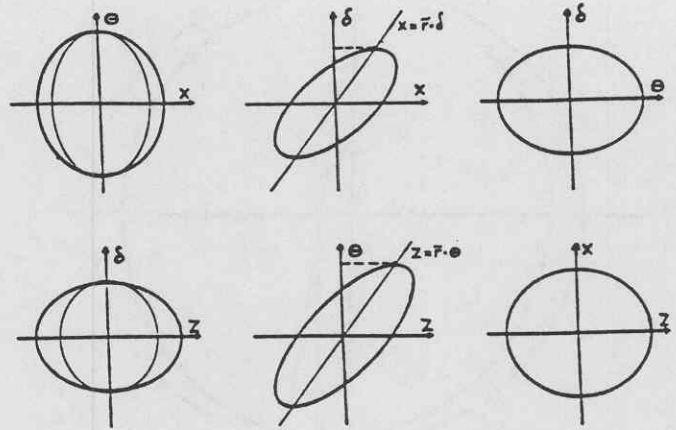


Fig. 3 : The projections of the six-dimensional eigenellipsoid involving coordinates of the horizontal and longitudinal subspace for a cyclotron with straight sectors.

The values for the coupling coefficients k_1 and k_2 have been expected already, since they make sure that particles deviating from the central trajectory only in the momentum coordinate are positioned on the corresponding equilibrium orbit. The coefficient $k_4 = \tilde{r}$ demands in addition a coupling between the horizontal angle θ and the longitudinal displacement z . Let us explain the reason for this coupling looking on the simplest possible cyclotron orbit which is a circle. In Fig. 4 the thick lined circle indicates the central orbit. The circle marked in a thin line is an orbit with its center at M , having at point A the angle deviation θ . The $\theta - z$ coupling now requires that this particle shall be positioned at point B , heading the central particle by the distance $z = r \cdot \theta = \overline{BA}$. Then, half a revolution later, the same particle will be at position B' and thus being behind the central particle by the same distance. Averaged over one orbit (over one cycle of the radial betatron oscillation in the general case) the longitudinal displacement or the phase deviation φ_{rf} is zero. If, however, the particle with the angle θ would coincide with the central particle at point A it would be behind at point A' after half a revolution, and on the average z would be negative. In ref. 5) the center position phase of a particle is introduced. This coordinate describes the phase deviation of a particle measured in respect to its own orbit center. Together with the energy deviation of a particle it forms a set of canonical variables. The coupling terms $k_3 = 0$ and $k_4 = \tilde{r}$ correspond to a particle with zero center position phase. The tilt of the (θ, z) phase plane in Fig. 3 is such that for all particles their center position phase is constant.

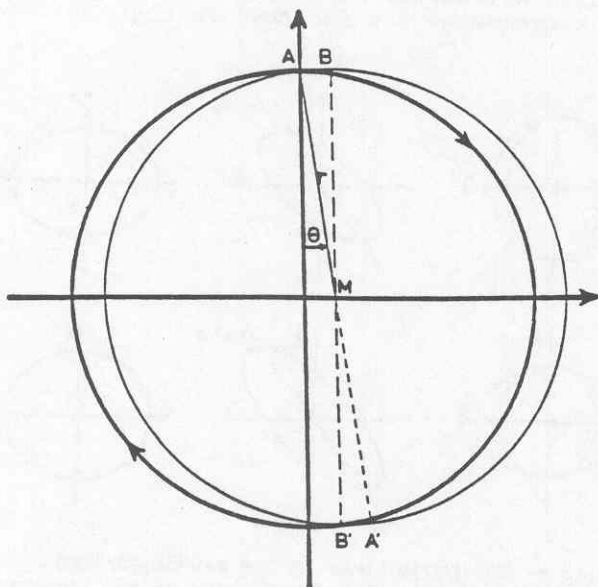


Fig. 4 : Explanation of the $(\theta - z)$ coupling, see text.

3. The beam line system between pre-accelerator and cyclotron.— In this chapter we will look for beam line systems which will match the beam from a pre-accelerator to the six-dimensional eigenellipsoid of the cyclotron orbit. The aim is to find systems with well separated functions for easy operation. They will include a stripper for increasing the charge state of the ions.

It is assumed that the time structure of the pre-accelerated beam is already such that it fits the periodicity of the accelerating voltage of the booster cyclotron. If the pre-accelerator is also a cyclotron this may be achieved by choosing its rf-frequency to a subharmonic of the frequency of the booster cyclotron. If the pre-accelerator is a dc-machine, pre-bunching is necessary.

Let us subdivide the beam line system into groups with different functions as indicated in Fig. 5. Point B shall be that location on a symmetry point of the cyclotron orbit where the beam has to be matched to its six-dimensional eigenellipsoid. At point A at the end of the preparation system the beam shall be achromatic (uncoupled subspaces; all projections of the ellipsoid involving coordinates of two different subspaces are upright ellipses). In longitudinal direction it shall be focussed such that it converges to the desired waist on its way to point B.

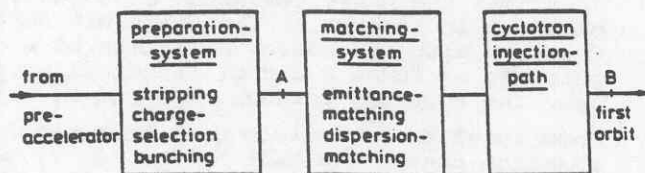


Fig. 5 : Subdivision of the beam line system in groups with specific tasks.

For convenience one may ask for a horizontal and vertical waist at point A. The beam shall have the proper charge state for acceleration in the cyclotron. Some comments on internal stripping are given later.

3.1. The matching system

As we consider only radial injection the matching system shall be a pure magnetic beam line (no buncher) with the same mid-plane symmetry as the cyclotron. It is represented by a matrix M with the general form of eq. (2). Neglecting a possible crossing of the accelerating gap in the injection path of the cyclotron this part of the system may also be considered as a magnetic beam line with a matrix I , giving

$$T = I \cdot M \quad (29)$$

for the transformation from point A to B. Using eq. (5) it can be shown that the transformation by the general matrix R of eq. (2) can be written as

$$R \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ \theta_0 \\ y_0 \\ \varphi_0 \\ z_0 \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 + r_{16}\delta \\ \bar{\theta}_1 + r_{26}\delta \\ \bar{y}_1 \\ \bar{\varphi}_1 \\ \bar{z}_1 - r_{26}\bar{x}_1 + r_{16}\bar{\theta}_1 \\ \delta \end{bmatrix} \quad (30)$$

where the coordinates indicated by bars result from the transformation by the uncoupled submatrices. Thus, the desired coupling between the horizontal and longitudinal phase plane described by eq. (28) is completely done when the correct dispersion matching

$$t_{16} = \tilde{r} \quad \text{and} \quad t_{26} = 0 \quad (31)$$

is accomplished.

The dispersion matching may be necessary even when the injected beam has a negligible momentum spread, since it serves for the constant center position phase of the particles. When accelerating on high harmonic numbers the pulse length may be comparable to the radial extension of the beam, and the tilt of the (θ, z) - plane in Fig. 3 becomes important. Then, without dispersion matching, oscillation of the center position phase occurs, resulting in a higher energy spread of the extracted beam.

The elements of the horizontal and vertical submatrices of T have to be matched to produce the uncoupled eigenellipses at B. Since the beam at A shall be achromatic, this emittance matching can be decoupled from the dispersion matching when splitting M into

$$M = D \cdot E \quad (32)$$

where E is a straight beam path with at least four quadrupole singlet magnets. Four parameters are necessary for matching in both planes the tilt of the ellipses at B and the ratio of their half-axes.

The injection path I normally does not produce the correct dispersion $i_{16} = \tilde{\gamma}$ and $i_{26} = 0$. Therefore the part D must contain dipole magnets to get the necessary dispersion. A suitable bending unit for this purpose may be a combination of two dipole magnets in reflection symmetry with a quadrupole singlet in the middle.^{*)} Together with another quadrupole singlet between this bending unit and the cyclotron entrance the dispersion matching can be accomplished using the gradients of the two quadrupoles as fit parameter. Depending on the optical properties of the injection path in the cyclotron it may be necessary to have some more quadrupoles to control the horizontal and vertical beam envelope.

3.2. The preparation system.

In most cases where heavy ions are accelerated in a booster cyclotron an increase of their charge state between the pre-accelerator and the cyclotron is necessary. Especially when a foil stripper is used for that purpose this may be accompanied by a considerable angle- and momentum straggling in the stripper. The corresponding increase of the phase space volume can be minimized when there is a sharp focus with uncoupled subspaces in all three dimensions at the location of the stripper. This is illustrated in Fig. 6.

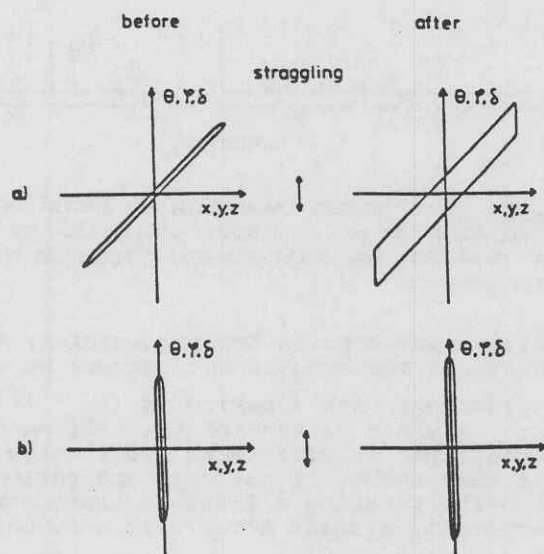


Fig. 6 : Increase of the phase space by angle- and momentum straggling a) for not properly matched ellipses and b) for a sharp focus.

^{*)} Such a system delivers a variable dispersion, with r_{16} proportional to r_{26} . In Fig. 7 two such systems around the quadrupoles q_2 and q_5 are used as achromatic bending units.

In cyclotrons with internal stripping this stripper is positioned normally just in front of the first orbit, where the beam should be matched to its eigenellipsoid. As we have seen this in a location where the ellipses may be not upright, and there is a coupling between the subspaces. Thus, in that case an optimal matching for the cyclotron orbit and for the stripper can not be achieved. The deterioration of the beam ellipsoid may become large if the angle- and / or momentum straggling is comparable or even much higher than the extension of the angle- and momentum coordinates of the eigenellipsoid.

If outside stripping is possible then it should take place in the preparation part of the system. Since we need a longitudinal (time-) focus at the stripper and on the first orbit of the cyclotron, normally two bunchers are needed. As the focal lengths of such lenses for the longitudinal phase space are often in the range of about ten meters, they may determine the total layout of the preparation system. Since they change the momentum coordinates of the particles they should also be positioned at an achromatic beam position where they mainly influence the longitudinal phase space.

As an example for a beam matching system the connection between the 6 MV Van de Graaff and the cyclotron for the VICKSI⁶⁾ facility in Berlin is shown in Fig. 7. The

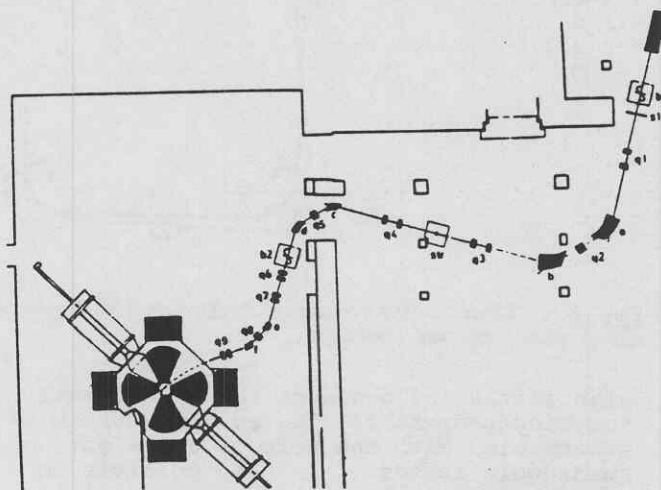


Fig. 7 : Beam matching system of the VICKI accelerator combination in Berlin.

preparation system ends immediately after the second buncher b2 which refocusses the pulses into the cyclotron. The first buncher b1 produces a time focus at the stripper str. The emittance matching part consists of the four singlets of the quadrupoles q_6 and q_7 , and the dispersion matching is done with the bending magnets e and f together with the quadrupoles q_8 and q_9 .

Instead of refocussing with the second buncher from the stripper into the cyclotron it is possible to design the magnetic system

in between such that its effective length for the longitudinal phase space becomes zero, thus giving a unit transformation for that subspace. Since the matching system and the injection path in the cyclotron provide a positive drift (element t_{56} of the matrix in eq. (29)) one needs a "negative drift" of the same length between the stripper and the matching system.

A possible way for such a magnetic system which gives a negative effective length r_{56} for the longitudinal submatrix is sketched in Fig. 8. It consists of four doubly focusing 90 degree analysing systems. Indicated besides the central path is a path for a particle with a positive momentum deviation. In the second and third dipole magnet this particle makes a considerable detour which overcompensates the higher velocity. Therefore, when starting at the same time at the beginning of the system, it will be behind the central particle at the end. This is the opposite from what happens in a normal drift. Since particles with $\delta = 0$ have a horizontal and vertical focus on the axis between the first and second dipole magnet this is a good place to regulate the detour of the $\delta \neq 0$ particles and consequently the value of r_{56} with the indicated quadrupole lenses,

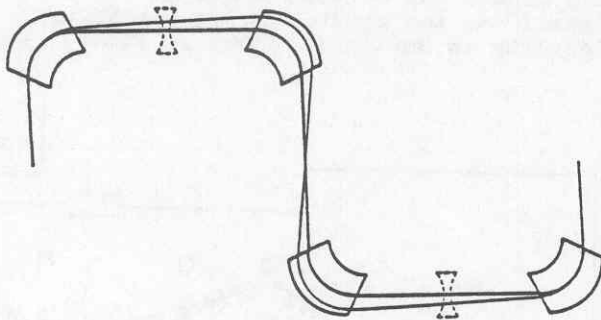


Fig. 8 : Effectively negative drift for the longitudinal phase plane; see text.

with little influence on the transversal focusing properties. The overall system is achromatic. With the help of a few more quadrupole lenses it is even possible to get for the total transformation a six-dimensional unit matrix- with the only exception of a suitable negative value of r_{56} . Such a magnetic system will be used for the SuSe accelerator combination between the stripper and the matching system.

4. Control of the correct matching.- Beam matching systems as described above can be calculated with computer codes like TRANSPORT¹⁾. Since there is a long way from the principal design calculation to the setting of the resulting parameters by the operator this, however, does not assure a correct matching at the end. For optimizing we need to know the influence of a change of the set values on the physical beam para-

eters, and we must have a possibility of measuring the beam properties.

The first one may get from the calculation itself. Let us consider only the matching part of the system. Starting from the calculated values for the "correct" eigenellipsoid one calculates different sets of quadrupole excitations, each of them yielding a change in one eigenellipsoid parameter like radial dispersion, angular dispersion, tilt of the horizontal eigenellipse, or ratio of the ellipse half-axes. Thus we get sets of combined changes of the quadrupole excitations which should produce orthogonal changes in the beam parameters.

The correct setting can be checked when measuring the turn pattern in the cyclotron with radial probes. If the matching of the coupled horizontal and longitudinal phase space is perfect, one should get turn peaks which change their height and width only smoothly with radius. If the emittance and dispersion matching is not correct, the turn peaks show oscillations in their height and width as can be seen in Fig. 9. These

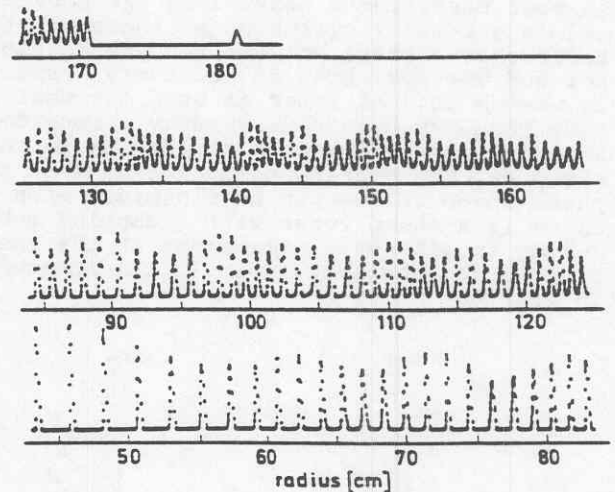


Fig. 9 : Turn pattern taken with the radial probe in the VICKSI cyclotron. The high oscillation of the peaks show that the emittance and dispersion matching is not perfect.

oscillations contain two frequencies. If the dispersion matching is not correct we get oscillations with a period of $(v_x - 1)^{-1}$ turns. A wrong setting of the horizontal eigenellipse results in an oscillation with half that number of turns in one period because the rotating ellipse is transformed identically already after half a revolution.

The best way for getting an optimal matching may be applying successively the calculated orthogonal changes of the quadrupole parameters, and measuring their influence on the turn height pattern. Then a fitted linear combination of these changes should give a correct setting.

This matching optimization was tested at the VICKSI accelerator - for some beams however with only moderate success. The reason for that was found to be the very narrow phase space acceptance in the last electrostatic inflection element. This caused different beam losses when applying the parameter changes, resulting in an incorrect measuring of their influences. Thus care should be taken to have enough acceptance around the calculated beam size for playing with the focussing elements of the matching system.

References

1. Karl L. Brown et al., TRANSPORT / 360 - A computer program for designing charged particle beam transport systems, SLAC-Report No. 91 (1969).
2. SLAC-Report No. 75 (1976) p. 78/79, eq. 62/63.
3. J. C. Herrera, E. E. Bliamptis, Symmetry properties of beam handling systems, Rev. Sci. Instr. 37 (1966) 183.
4. W. Joho, Application of the phase compression phase expansion effect for isochronous storage rings, Particle Accelerators 6 (1974) 41.
5. W. M. Schulte, The theory of accelerated particles in AVF cyclotrons, thesis, Eindhoven University of Technology (1978).
6. G. Hinderer, K. H. Maier, The beam-matching system between pre- and main-accelerator for the Van de Graaff-cyclotron-combination VICKSI, IEEE Transactions on Nuclear Science, NS-22, No. 3 (1975) 1722.

" DISCUSSION "

K. ZIEGLER : Remark : if one wants to have perfect matching as described, one has to be careful not to cut part of the beam after the matching part of the beam line, that means that the acceptance of all following elements should be large enough to transmit the full beam.

G. HINDERER : That is very true !

S. ADAM : Remark : The use of the transport program for the calculation of cyclotron orbits is highly dangerous in case of spiral angles differing substantially from zero.

J.C. CORNELL : A comment and a question. People are often rather suspicious of using TRANSPORT for cyclotron magnets, but we have used the calculations you described, by dividing the sector magnet field from valley to valley into slices, calculating transfer matrices for each and multiplying these together with TRANSPORT, to obtain eigen ellipsoids for the closed injection orbit.

" DISCUSSION " (continued)

What comments do you have on the use of TRANSPORT alone for cyclotron design ?

G. HINDERER : TRANSPORT of course does not provide for acceleration, so one would have to redefine the central orbit after acceleration. I think it is possible to use linear matrices for the transformation, since the cyclotron beam width is normally very small compared to the radius. The matrices however could also be obtained by numerical integration. The question if the program TRANSPORT delivers the correct matrices depends on the separation of the magnetic field into sectors, since this program assumes separated elements.

M.K. CRADDOCK : Comment : Regarding the question by J.C. CORNELL, at TRIUMF we have developed a matrix multiplication code (COMA) for tracking accelerated particles through a sector cyclotron.

P. ROUSSEL : What is the amount of negative length which you can generate with the system of four magnets which you presented ? If you try to avoid the use of a second buncher between a tandem and a cyclotron, it is something like 100 meters which you need and more magnets are necessary. We present in this conference a project with 6 magnets allowing to compensate for 40 to 90 meters.

G. HINDERER : In the case for SuSe, we need about 20m. This can be achieved easily with a bending radius of the magnets of 1m, still getting telescopic optics in both planes ($r_{21} = r_{12} = r_{34} = r_{43} = 0$).

I think it is possible to get an even longer negative drift. However then, one must look at the overfocusing effect, since the r_{21} element of the transfer matrix may become large.

NOVEL INFLECTORS FOR CYCLIC ACCELERATORS

R. W. MÜLLER

AEG-Forschungsinstitut, Frankfurt (Main)-Niederrad, Germany

Received 19 May 1967

After discussing briefly the existing types of inflectors for particles moving in a homogeneous magnetic field, the author describes two new types of inflectors. The equations of motion allow rigid integration; linear expansion leads to beam transfer optics. The combined effects of the inflector beam optics and the

optics of the beam transfer system are described. As to beam optics, the "hyperboloid inflector" seems to be ideally suited for isochronous cyclotrons. The second development, the "parabolic inflector", though with regard to beam optics less interesting than the "hyperboloid inflector", yet is advantageous in other respects.

1. Introduction

As a result of the increasing application of cyclotrons it has become more and more important to develop adequate systems for injection of particles from external ion sources. In conventional sources only few substances can be ionized to a limited degree and the particles are always unpolarized. Besides ions and particles ionized to an undesired degree, these sources emit considerable quantities of non-ionized substance into the machine. The external production of ions and their introduction into the center of the machine is necessary,

1. If a particularly high vacuum is required, for instance, for the acceleration of negative ions, molecule ions or polarized particles;

2. For the generation and acceleration of polarized particles or particles of a high degree of ionization;

3. Where the machine may be seriously contaminated by the ion source, for instance, when solid or liquid substances, hydrocarbons or corrosive gases are ionized and where no space for cryogenic baffles is available.

Other cases have to be taken into consideration, where the particle source has to be accommodated in a very small space as, for instance, in a microtron. In this case, the space required by an inflector in the median plane of the accelerator possibly may be smaller than that required by an electron source of corresponding electron energy.

Among the various injection methods under discussion, axial injection through a bore in the magnet and subsequent deflection by 90° is one of the safest, though not always feasible (as, for instance, with injection energies of several MeV).

The beam of particles is guided conventionally; it is necessary to take into consideration, that the particles entering the magnetic field axially are influenced by the stray field in the magnet bore. Finally, it is the purpose of an inflector system to turn the movement of the particles from the axial into the radial-azimuthal direction.

Selecting an inflector system for a particular case of application requires that the following is taken into consideration:

a. The aperture of the system should be as large as possible;

b. The voltage applied to the inflector should not be too high;

c. The beam optics mechanism should be linear across the entire cross section of the beam, that is, the volume of the smallest phase space ellipsoid comprising all the particles emitted by the inflector (the "effective emittance") should not be larger than the emittance of the source;

d. The inflector should have other particular reproduction properties to prevent a loss of beam quality (cf. section 3.3);

e. A beam injected along the machine axis (due to the symmetry of the magnetic stray fields such a beam is easy to guide) should leave the inflector on a pre-determined radius and in a desired direction, to be captured concentrically to the machine.

Inflectors in cyclotrons preferably operate electrostatically, since magnetic field arrangements would result in stray fields which are difficult to shield and, in consequence, cause considerable interference.

2. Inflector types

Contributors in various countries have been active to solve the inflector problem.

In Birmingham, a type of inflector is used which produces, by means of a metal gauze and a plate, a homogeneous electric field whose field vector is inclined against the magnetic field by a little over $45^{\circ 1.2}$. The particles enter the electric field obliquely, lose some of their kinetic energy and are re-accelerated in a horizontal direction. The effect of the metal gauze on beam optics is similar to that of a lenticular screen or frosted glass on light optics (depending on the mesh width). In each mesh of the metal gauze the vicinity field of the wires acts on the beam like a lens. The

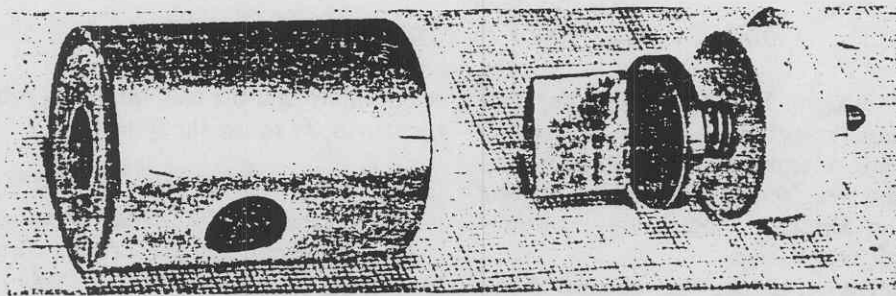


Fig. 1. Gauzeless ion mirror.

effective emittance of the inflector is slightly increased as compared to the source emittance; in addition, part of the beam current is wholly absorbed. The voltage applied to the electrodes is in the order of the voltage which the ions have run down in preacceleration. The aperture size of the compactly built system is chosen to make any repositioning during operation unnecessary. These are two advantages under the rough operating conditions of a cyclotron, in particular where the machine center is not easily accessible and offers little space.

To meet the requirements of such applications, AEG has developed an inflector with a wide aperture and an inhomogeneous electric field without metal gauze. Fig. 1 is an exploded view of the inflector, fig. 2 shows the cross section of a hydrogen ion beam after leaving the inflector; the beam is split into two q/m components. The net-like structure is caused by a metal gauze of $290\text{ }\mu\text{m}$ mesh width which had been placed over the inflector entrance for the purpose of studying the reproduction properties. The image is a silhouette projected in an ion beam which is essentially parallel before entering the inflector. The image appears on the screen enlarged by a factor of 2. The electrostatic field of this inflector has been calculated using numerical iteration procedures of the three-dimensional Laplace equation, the particle orbits in this field and in a homogeneous magnetic field have been obtained by numerical integration according to Runge-Kutta. This approach is complicated and inaccurate; nevertheless, it permitted to find that an inclined plane reflector electrode has a much too strong defocussing effect with this housing electrode. Calculations have been made with several other reflector forms among which the shown one proved to be the optimum solution. The procedure does not enable the details of reproduction properties, for instance, the transfer matrix and the apertural defect, to be calculated at reasonable expense. The inlet and the outlet apertures each form a single immersion lens, the former having a defocussing and

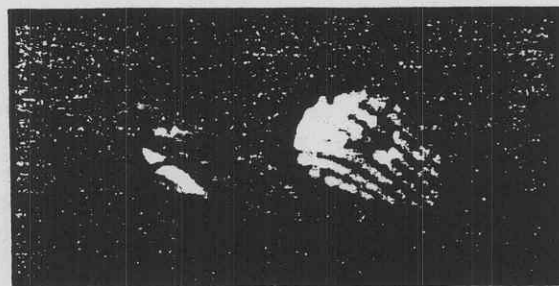
the latter a focussing effect. To compensate the defocussing effect of the inlet aperture, it is necessary that the field of the reflector electrode focus in the axial direction, radially, the magnetic field contributes to focussing.

A second class of inflectors, also called deflectors, has electric fields whose field vector is essentially vertical in relation to the tangent line in each point of the trajectory. The particles traverse the deflector at an essentially constant energy. The inlet and the outlet fringing fields do not possess any lens properties, they only act upon the energy distribution within the beam.

The inflectors of this class are advantageous in that the voltage applied to the electrodes may be low as compared to the pre-accelerating voltage. Making full use of this advantage, though, results in a small inlet slit and, in consequence, a small aperture; the inflector has to be adjusted very accurately and may have an acceptance which is too low for high emittance beams, for instance, from sources emitting polarized protons and deuterons.

The physical dimensions of these "deflectors" will be somewhat larger than those of "mirrors". In some cases, however, the optical properties of deflectors are superior to those of mirror optics.

In designing a deflector for the Grenoble cyclotron⁴), item c. of the introduction has been taken into particular consideration. Its field is produced between two

Fig. 2. Cross section of the beam after it has left the mirror (two q/m components). $\times 5$

spiral-type tape electrodes. This type of inflector does not allow to increase the distance between the electrodes in order to obtain a larger aperture without having the electric fringing field seriously affect the guiding field laterally. The electrode bodies are intricately shaped and difficult to machine.

These two disadvantages can be eliminated by postulating that the electrodes be formed as surfaces of revolution. These can be very accurately machined on a lathe. The electrodes extend far enough laterally of the beam so that even with a larger aperture the stray field affects the trajectories only at their ends.

The author has computed³⁾ and built an inflector of this type, with surfaces of revolution having a longitudinal section contour

$$z = A/\log(r/r_s),$$

where r_s is a constant for both electrodes and A is different for each electrode.

The integration of motion has been approximated using the analog computer which yielded combinations of parameters for which the particle trajectory is near an equipotential plane.

The following describes a similar inflector which can be dealt with analytically throughout. Due to the accuracy and transparency of computation this inflector may be considered as a model for all class 2 inflectors. Its electrode surfaces are the surfaces of quadratic hyperboloids of revolution with

$$r^2 - 2z^2 = \text{constant}.$$

Analysis of the transfer matrix of this deflector type shows that its optical properties are unique. Chapter 4 describes still another type of deflector which is very easy to machine, but is a compromise solution as regards transfer optics.

3. Hyperboloid inflector

3.1. BASIC RELATIONS

It is obvious to try to find a field in which the angle formed by the velocity vector and the axial direction increases at constant velocity until it has reached $\frac{1}{2}\pi$ and the particle leaves the inflector. If we succeed, moreover, in making the particle coast along an equipotential plane at constant speed, the z -component of the velocity necessarily decreases according to the cosine law. This is precisely what happens when the z -component of the electric field has a linear increase of $(-z)$. This same postulate has been the basis used by Belmont and Pabot⁴⁾. We, however, want to postulate

additionally that the field possesses rotational symmetry; let us try to use the potential

$$V = -\frac{1}{2}Kz^2 + \frac{1}{2}Kr^2 + c, \quad (1)$$

in accordance with the Laplace equation.

This is the most simple formula of this type; it has been tried, for instance, to add $(\log r)$ -terms, but this makes analytical treatment impossible. The field components are expressed as

$$E_z = -Kz \text{ and } E_r = \frac{1}{2}Kr.$$

By introducing

$$k^2 = qK/m \text{ and } \beta = qB_z/m = \text{constant},$$

(the latter of these two expressions represents the cyclotron angular velocity in the homogeneous magnetic field B_z), where q is the charge and m is the mass of the particle, we obtain the following equations of motion in cylindric coordinates

$$\ddot{r} = r\{\dot{\theta}(\dot{\theta} - \beta) + \frac{1}{2}k^2\}, \quad (2)$$

$$\ddot{\theta} = \dot{r}(\beta - 2\dot{\theta})/r, \quad (3)$$

$$\ddot{z} = -k^2z. \quad (4)$$

Eqs. (2) and (3) are interconnected differential equations; eq. (3) however, can be integrated once (with the initial conditions: $r = r_0$, $\dot{z} = v_0$, $z_0 = \theta_0 = \dot{\theta}_0 = \dot{r}_0 = 0$, which are the initial conditions for the "correctly running particle"), whence

$$\dot{\theta} = \frac{1}{2}\beta\{1 - (r_0^2/r^2)\}. \quad (3a)$$

Eq. (2) can now be solved by integrating twice which results in

$$r = r_0[\{\beta^2 - 2k^2 + 2k^2 \sin^2([\frac{1}{2}\beta^2 - \frac{1}{2}k^2]^{\frac{1}{2}} \cdot t)\} \cdot \{\beta^2 - 2k^2\}^{-1}]^{\frac{1}{2}}. \quad (5)$$

From eq. (4) we obtain

$$z = v_0 \sin(kt)/k. \quad (4a)$$

It can easily be seen that the particle trajectory will lie on the equipotential plane

$$r^2 - 2z^2 = r_0^2,$$

only if

$$\beta = k\sqrt{6} \quad (6)$$

and

$$v_0 = \frac{1}{2}r_0k. \quad (7)$$

With the magnetic field and the kinetic energy of the particle given, and $R_{\text{mag}} = mv_0/(qB_z)$, we find that

$$r_0 = (2\sqrt{6})R_{\text{mag}} \quad (8)$$

is the injection radius to be chosen; to the inflector whose electrode surfaces are expressed by

$$r^2 - 2z^2 = r_1^2 \text{ and } r^2 - 2z^2 = r_2^2; \quad r_2 > r_0 > r_1,$$

the following voltage has to be applied

$$U = \frac{1}{4}K(r_2^2 - r_1^2) \approx 4U_p(r_2 - r_1)/r_0, \quad (9)$$

where U_p is the acceleration voltage of the particle with respect to the source.

If the inflector voltage is not symmetric to make the particle enter the inflector without deceleration or acceleration the trajectory potential inside the inflector has to be added to U_p .

The maximum electric field strengths encountered radially and axially inside the inflector are, at the trajectory ends,

$$E_{r, \max} = \frac{1}{2}B_z v_0 = -E_{z, \max} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{6}. \quad (9a)$$

The limit against electrical breakdown is given by $|E_{z, \max}|$. The trajectory curve of the ideal trajectory now becomes

$$\left. \begin{aligned} r_c &= r_0 \{1 + \frac{1}{2} \sin^2(kt)\}^{\frac{1}{2}}, \\ \theta_c &= (\frac{1}{2}\sqrt{6})kt - \arctan \{(\frac{1}{2}\sqrt{6})\tan(kt)\}, \\ z_c &= \frac{1}{2}r_0 \sin(kt), \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

or, using the Cartesian coordinates $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ with the constant values $a = (\frac{1}{2}\sqrt{6}) + 1$, $b = (\frac{1}{2}\sqrt{6}) - 1$,

$$\left. \begin{aligned} x_c &= \frac{1}{2}r_0 \{-b \cos(akt) + a \cos(bkt)\}, \\ y_c &= \frac{1}{2}r_0 \{-b \sin(akt) + a \sin(bkt)\}, \\ z_c &= \frac{1}{2}r_0 \sin(kt). \end{aligned} \right\} \quad (10a)$$

Fig. 3 shows the trajectory with time scale together with the inflector electrodes and a coordinate system (cf. section 3.4). From the beginning to the end of the trajectory θ passes through an interval of the length $\frac{1}{2}\pi\{(\frac{1}{2}\sqrt{6}) - 1\} = 20.2^\circ$.

3.2. BEAM OPTICS OF THE INFLECTOR

Even with initial values other than zero, of \dot{z}_a , θ_a , θ_a and $\Delta r_a = r_a - r_0$, the equations of motion can be rigidly integrated. We maintain $z_0 = 0$. To begin with, we consider a beam which leaves the source mono-energetically. Particles entering closer to the origin of coordinates than r_0 are decelerated in the electric stray field of the inlet opening, those entering at some point farther out are accelerated; there is, however, no change of direction exceeding the deflecting effect of the inflector field which is encountered anyway.

After entering the inflector

$$\begin{aligned} \dot{z}_a &= \frac{1}{2}r_0 k \{1 + 2(r_a^2 - r_0^2)/r_0^2\}^{\frac{1}{2}} \\ &\approx \frac{1}{2}r_0 k (1 + 2\Delta r_a/r_0), \quad (\Delta r_a \ll r_0). \end{aligned} \quad (11)$$

We obtain from the exact expression (11) and from eqs. (2), (3), (4), (6) and (7),

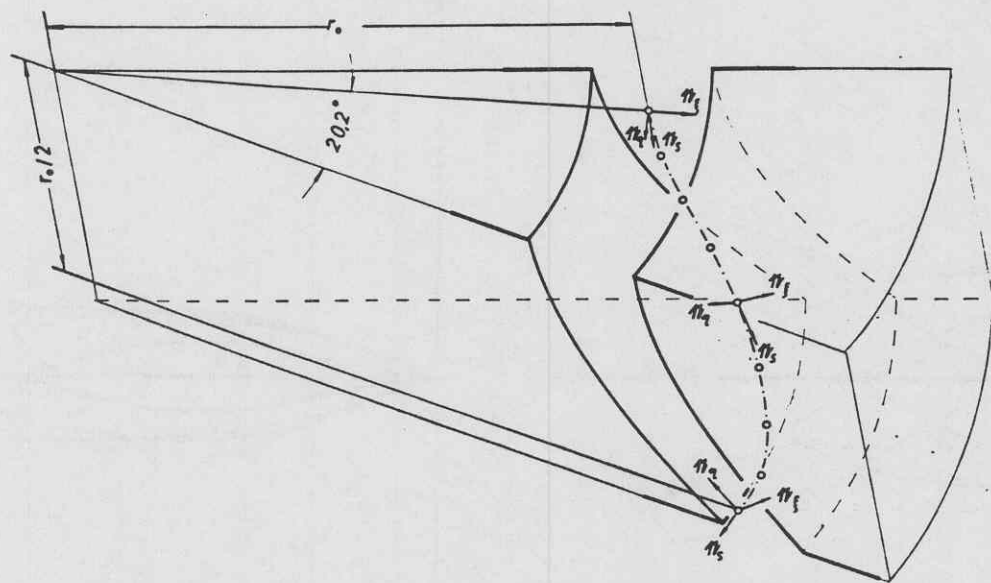


Fig. 3. Geometry of the hyperboloid inflector showing the trajectory of a correctly running particle and the optical coordinate system (o---o = time marks, distance $k\Delta t = \pi/16$).

$$\left. \begin{aligned}
 r &= \{r_a^2 + [(\frac{1}{2}\sqrt{6} - \theta_a/k)^2 - 1]r_a^2 + \dot{r}_a^2/k^2\} \sin^2(kt) + \\
 &\quad + k^{-1}r_a\dot{r}_a \sin(2kt)^{\frac{1}{2}}, \\
 \theta &= \theta_a + (\frac{1}{2}\sqrt{6})kt - \\
 &\quad - \arctan \left\{ [(\frac{1}{2}\sqrt{6} - \theta_a/k)^2 + \dot{r}_a^2/(kr_a)^2] \tan(kt) + \right. \\
 &\quad \left. + \dot{r}_a/(kr_a) \right\} [\frac{1}{2}\sqrt{6} - \theta_a/k]^{-1} + \\
 &\quad + \arctan \{ \dot{r}_a [kr_a(\frac{1}{2}\sqrt{6} - \theta_a/k)]^{-1} \}, \\
 z &= \frac{1}{2}r_0 \{1 + 2(r_a^2 - r_0^2)/r_0^2\}^{\frac{1}{2}} \sin(kt).
 \end{aligned} \right\} (12)$$

If $\Delta r_a = r_a - r_0$, \dot{r}_a , θ_a and $\dot{\theta}_a$ are small enough, eq. (12) can be expanded linearly toward these values; as the differential vector of the particle under observation in

relation to the correctly running particle, we obtain, with $\varphi = kt$,

$$\left. \begin{aligned}
 \Delta r &= r - r_c = \\
 &= \Delta r_a (1 + \frac{1}{2} \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} - \\
 &\quad - \{(\frac{1}{2}\sqrt{6})(r_0 \dot{\theta}_a/k) \sin^2 \varphi - \\
 &\quad - (\dot{r}_a/k) \sin \varphi \cdot \cos \varphi\} (1 + \frac{1}{2} \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}}, \\
 r_c \Delta \theta &= r_0 \theta_a (1 + \frac{1}{2} \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} + \\
 &\quad + \{(r_0 \dot{\theta}_a/k) \sin \varphi \cdot \cos \varphi + \\
 &\quad + (\frac{1}{2}\sqrt{6})(\dot{r}_a/k) \sin^2 \varphi\} (1 + \frac{1}{2} \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}}, \\
 \Delta z &= \Delta r_a \sin \varphi.
 \end{aligned} \right\} (13)$$

Selecting the phase space coordinates Δr_e , \dot{r}_e ... at the inflector exit, that is, $\theta = \theta_e$, the particle under observation has the end phase

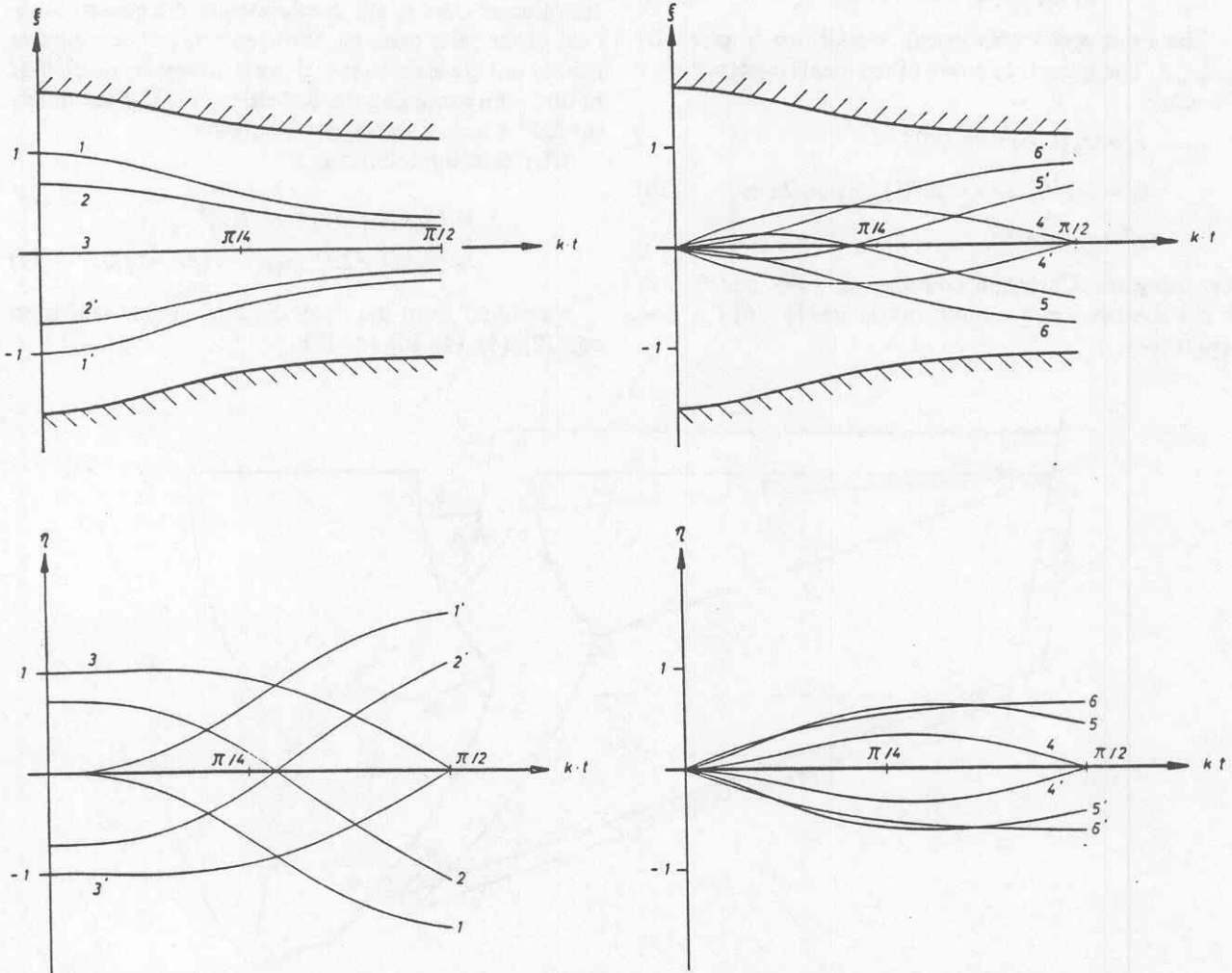


Fig. 4. Particle movement in the hyperboloid inflector with the beam parallel or focussed at the inflector entrance.

$$\left. \begin{aligned} \varphi_e &= \frac{1}{2}\pi + \Delta\varphi_e, \\ \Delta\varphi_e &= +k\Delta t_e \approx \Delta\varphi(\frac{1}{2}\pi), \\ \Delta t_e &\approx -\Delta\theta(\frac{1}{2}\pi)/\dot{\theta}_e(\frac{1}{2}\pi), \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

so

$$\left. \begin{aligned} \dot{r}_e &= \Delta\dot{r}(\frac{1}{2}\pi) + \Delta t_e \ddot{r}_e(\frac{1}{2}\pi), \\ \dot{z}_e &= \Delta\dot{z}(\frac{1}{2}\pi) + \Delta t_e \ddot{z}_e(\frac{1}{2}\pi), \\ \Delta r_e &= \Delta r(\frac{1}{2}\pi) + \Delta t_e \dot{r}_e(\frac{1}{2}\pi) = \Delta r(\frac{1}{2}\pi), \\ \Delta z_e &= \Delta z(\frac{1}{2}\pi) + \Delta t_e \dot{z}_e(\frac{1}{2}\pi) = \Delta z(\frac{1}{2}\pi), \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

and eqs. (13) yield the transfer matrix

$$\begin{pmatrix} \Delta z_e \\ \dot{z}_e \\ \Delta r_e \\ \dot{r}_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}k\sqrt{6} & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{6} & 0 & 0 & -k^{-1} \\ 0 & 0 & k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta r_a \\ \dot{r}_a \\ r_0\theta_a \\ r_0\dot{\theta}_a \end{pmatrix}. \quad (16)$$

This sequence of coordinates has been chosen to obtain, as before, a right-hand coordinate system after inflection or in other words, a transfer matrix having the determinant value +1 rather than -1.

A formally more exact method of investigating the beam optics and finding the transfer matrix is the introduction of an optical coordinate system (ξ, η, s) defined by

$$\left. \begin{aligned} n_\xi &= [(1 + \frac{1}{2}\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}(1 + \frac{3}{2}\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}, 0, \\ &\quad -(1 + \frac{3}{2}\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}\sin\varphi]; \\ n_\eta &= [-(\frac{1}{2}\sqrt{6})\{(1 + \frac{1}{2}\sin^2\varphi)(1 + \frac{3}{2}\sin^2\varphi)\}^{-\frac{1}{2}}\sin^3\varphi, \\ &\quad (1 + \frac{3}{2}\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}(1 + \frac{1}{2}\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}\cos\varphi, \\ &\quad -(\frac{1}{2}\sqrt{6})\{1 + \frac{3}{2}\sin^2\varphi\}^{-\frac{1}{2}}\sin^2\varphi]; \\ n_s &= [(1 + \frac{1}{2}\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}\sin\varphi \cdot \cos\varphi, \\ &\quad (\frac{1}{2}\sqrt{6})\{1 + \frac{1}{2}\sin^2\varphi\}^{-\frac{1}{2}}\sin^2\varphi, \cos\varphi]; \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

so that n_ξ has the direction of the electric field vector, n_s always has the direction of the velocity vector, and the system does not revolve during entrance into and exit from the inflector.

By inserting $\varphi = 0$ and $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ we find, with $(') \equiv (1/k)d/dt$

$$\left. \begin{aligned} \xi_0 &= \Delta r_a, \quad \xi'_0 = \dot{r}_a/k, \\ \eta_0 &= r_0\theta_a, \quad \eta'_0 = r_0\dot{\theta}_a/k, \quad s_0 = 0, \\ \xi_e\sqrt{3} - \eta_e\sqrt{2} &= \Delta r_e\sqrt{5}, \\ \xi'_e\sqrt{3} - \eta'_e\sqrt{2} &= (\dot{r}_e/k)\sqrt{5}, \\ -\xi_e\sqrt{2} - \eta_e\sqrt{3} &= \Delta z_e\sqrt{5}, \\ -\xi'_e\sqrt{2} - \eta'_e\sqrt{3} &= (\dot{z}_e/k)\sqrt{5}, \\ s_e &= -\frac{1}{2}r_0k\Delta t_e. \end{aligned} \right\} \quad (17a)$$

By transforming eq. (13) we get

$$\left. \begin{aligned} \xi &= [\xi_0\{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi\} + \xi'_0\sin\varphi \cdot \cos\varphi - (\frac{1}{2}\sqrt{6})\eta'_0\sin^2\varphi] \cdot \\ &\quad \cdot \{1 + \frac{3}{2}\sin^2\varphi\}^{-\frac{1}{2}}, \\ \eta &= -(\sqrt{6})\xi_0\{1 + \frac{3}{2}\sin^2\varphi\}^{-\frac{1}{2}}\sin^3\varphi + \\ &\quad + (\frac{1}{2}\sqrt{6})\xi'_0\{1 + \frac{3}{2}\sin^2\varphi\}^{-\frac{1}{2}}\sin^2\varphi \cdot \cos\varphi + \\ &\quad + \eta_0\{1 + \frac{3}{2}\sin^2\varphi\}^{\frac{1}{2}}\cos\varphi + \eta'_0\{1 + \frac{3}{2}\sin^2\varphi\}^{-\frac{1}{2}}\sin\varphi, \\ s &= 2\xi_0\sin\varphi \cdot \cos\varphi + \xi'_0\sin^2\varphi + (\frac{1}{2}\sqrt{6})\eta_0\sin^2\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

We obtain the same results as before and also additional information, for instance, on the extent of the beam inside the inflector. Fig. 4 shows the trajectories of a particle beam which enters the inflector parallel or with a focus at the inflector entrance. It should be noted, however, that the occurrence of such beam states is rather improbable.

It is possible to analyze the energy resolution of the inflector in a similar way. The (r, θ) -movement being completely independent of the z -movement, and the relative trajectory end time t_e being dependent only on the initial r - and θ -values, a varying $v_a = v_0(1 + \varepsilon_a)^{\frac{1}{2}}$ is of consequence only for z_e . Using

$$\dot{z}_a = \frac{1}{2}r_0k\{1 + \varepsilon_a + 2(r_a^2 - r_0^2)/r_0^2\}^{\frac{1}{2}}, \quad (19)$$

the result is

$$\Delta z_e = \frac{1}{2}r_0\varepsilon_a + \Delta r_a, \quad (20)$$

while \dot{z}_e remains unchanged. If we now want to write the transfer matrix of the entire 6-dimensional phase space, we include the transfer relations of energy and time, viz.

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_e &= \varepsilon_a, \\ t_e - \pi/(2k) &= t_a - 2\dot{r}_a/(r_0k^2) - (\sqrt{6})\theta_a/k, \end{aligned} \right\} \quad (20a)$$

writing

$$\begin{bmatrix} \Delta z_e \\ \dot{z}_e \\ \Delta r_e \\ \dot{r}_e \\ \varepsilon_e \\ t_e - \pi(2k)^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}r_0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}k\sqrt{6} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{6} & 0 & 0 & -k^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2/(r_0k^2) - \sqrt{6}/(r_0k) & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta r_a \\ \dot{r}_a \\ r_0\theta_a \\ r_0\dot{\theta}_a \\ -\varepsilon_a \\ t_a \end{bmatrix}. \quad (21)$$

3.3. COMBINED EFFECTS OF BEAM TRANSFER OPTICS OF GUIDING SYSTEM AND INFLECTOR

In order to facilitate discussion, we re-write eq. (16) and normalize the velocities with the cyclotron angular frequency β . We use the phase coordinates ξ, ξ', η , and η' . ξ, η and the beam direction coordinate s , define a right-hand coordinate system whose orientation in space will be considered, if at all, only at the beginning and the end of the entire trajectory. We only keep in mind that $\xi \equiv \Delta z$, $\xi' \equiv \dot{z}/\beta$, $\eta \equiv \Delta r$, and $\eta' \equiv \dot{r}/\beta$ after exit from the inflector. If desired, we may change the phase space coordinates by means of rotational transformation, while continuing to use the same nomenclature.

The inflector matrix and its inverse now are

$$\mathbf{M}_I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{6} & 0 & 0 & -\sqrt{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6}\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}_I^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{6} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{6} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{6}\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix}. \quad (16a)$$

It is now possible to postulate a given population of the final phase space and, with a transformation using \mathbf{M}^{-1} , to answer the question concerning the beam structure before inflection.

As an example, we demand the normally most favourable homogeneous population of the stationary ellipsoid. A stationary ellipsoid is mapped into itself after each magnetic field period which, physically, means that the beam does not pulsate. We assume that the areas of both the (r, r') and (z, z') section are equal. With $Q_r = 1^\dagger$, the (r, r') section is a circle. The shape of the (z, z') section depends on the rf phase of the group of particles under observation in relation to the

accelerating field, because it acts very strongly on Q_z ; besides, the ellipse may be slightly displaced from the principle axis position by a small angle depending on the azimuth.

Postulating axis ratios from

$$2:1 (Q_z = \frac{1}{2}) \text{ to } 6:1 (Q_z = \frac{1}{6})$$

and principle axis position, we obtain a quite useful approximation to the stationary ellipsoid.

To obtain fig. 5,⁺ we assume ad libitum the axis relation to be 4:1. We find that the ellipsoid of the offered beam has to be oblique with respect to the (ξ, η') and (η, ξ') sections. This, and the slope of the ellipses of $+\frac{1}{2}$ and $-\frac{1}{2}$, indicate that the beam has to be rotationally degenerate in a way similar to an originally non-degenerate beam when it has entered the magnetic field²). As a matter of fact, we find that the rotational degeneracy which the beam receives when it enters the magnetic field axially is completely eliminated by the inflector at any distance L between inlet bore and inflector entrance.

To prove this, we write the matrices of the various optical components. If the field in the entrance opening (from the pole plate into the magnetic field) rises quickly over a distance which is short in comparison to v_0/β^2 , it is possible to obtain the matrix of the entrance into the field from the Laplace differential equation, and by integrating the equation of motion:

$$\mathbf{M}_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

While the beam now moves through the distance L in the magnetic field, it is turned about its axis and focussed, hence

* ξ' and η' now differ from the quantities of sect. 3.2 by the factor $1/\sqrt{6}$.

[†] Q_r is the radial, Q_z the axial oscillation number per turn.

⁺ $\Delta r_a \equiv \xi_1$; $r_0\theta_a \equiv \eta_1$; $\Delta t_e \equiv \xi_2$; $\Delta r_e \equiv \eta_2$.

§ A further condition is: $R_{\text{mag}} \gg \text{beam diameter}$.

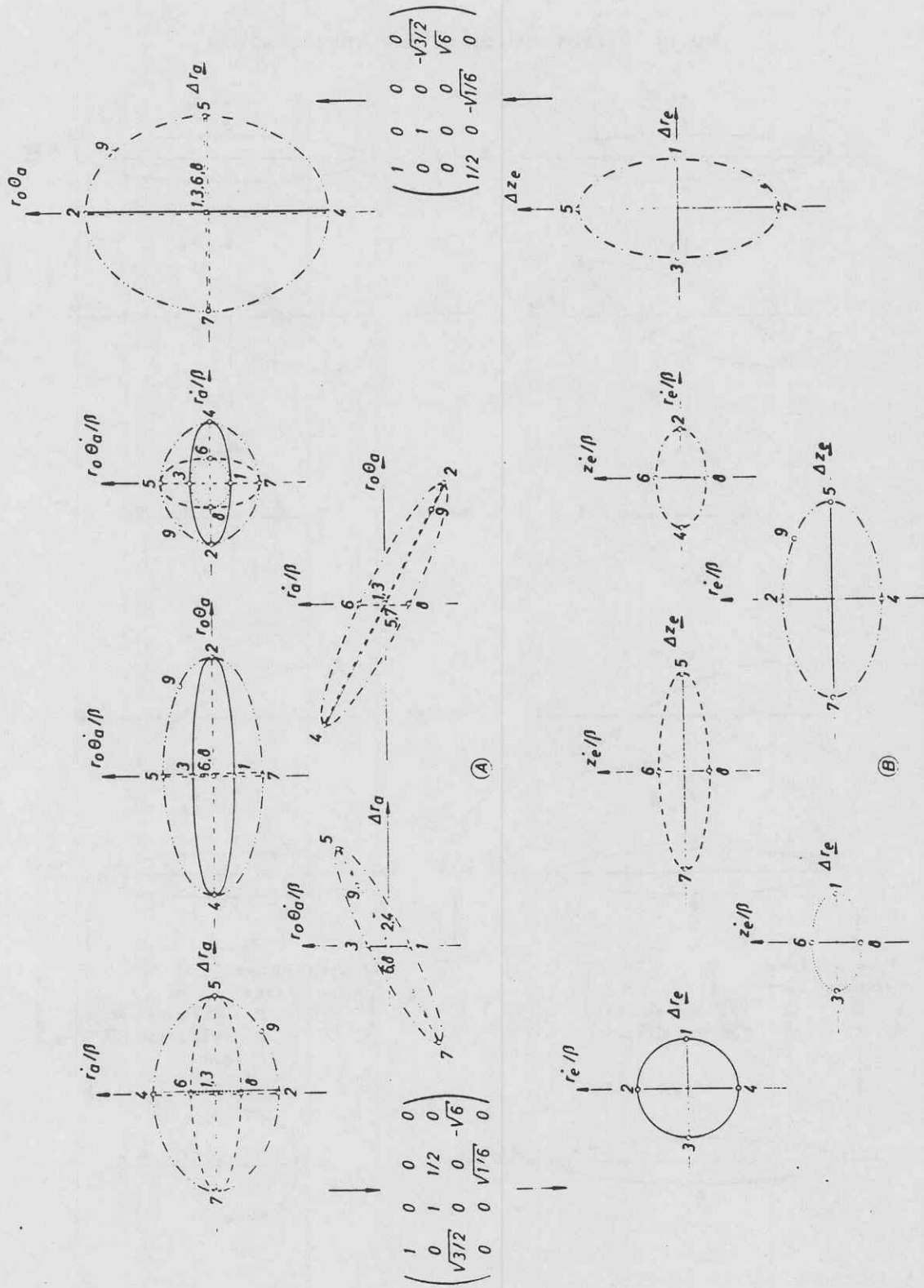


Fig. 5. Population of phase space before inflection (A) as required to yield a homogeneous beam after inflection (B).

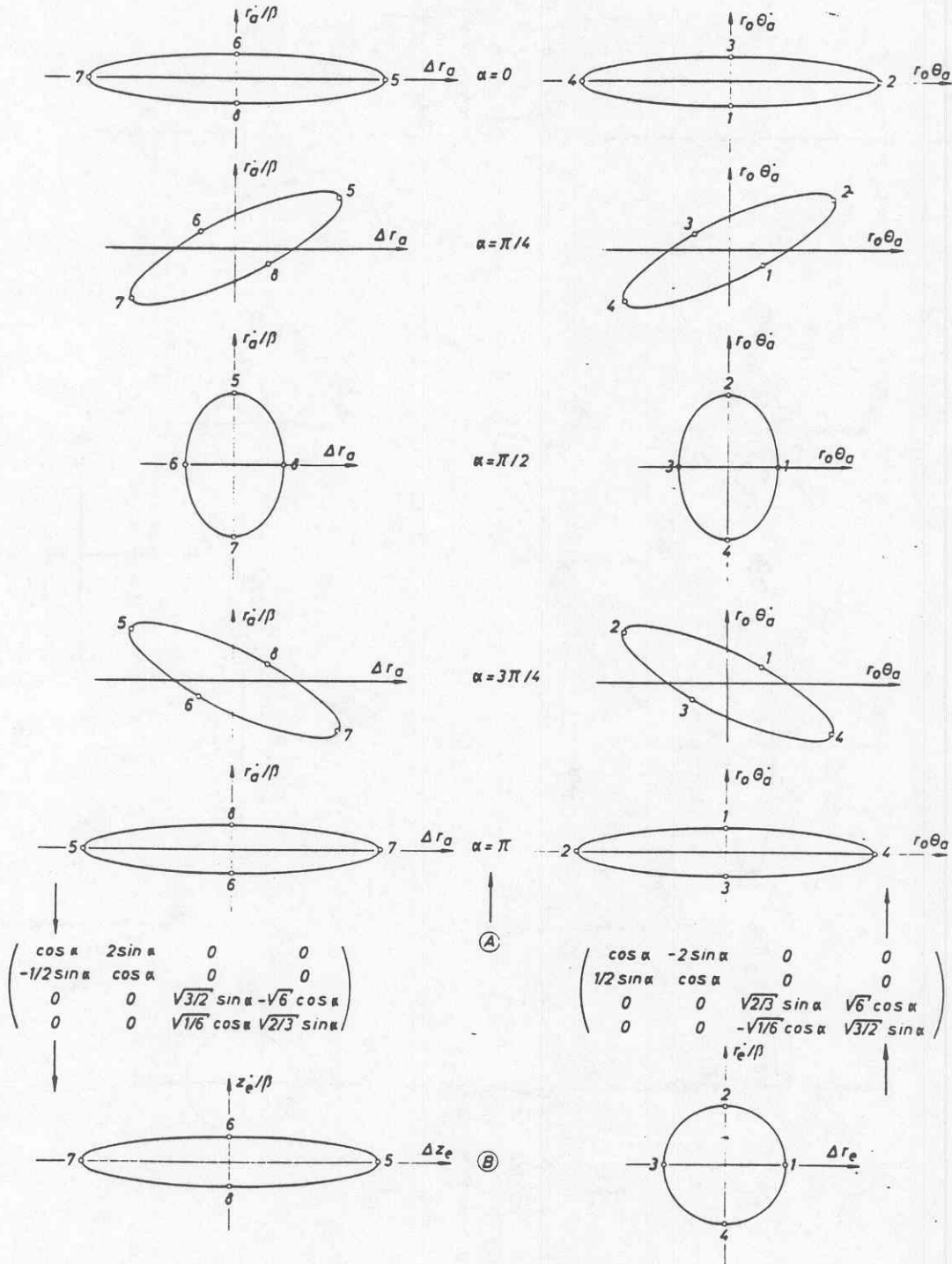


Fig. 6. Phase space population at field entrance bore (A) which after inflection (B) yields a homogeneous cyclotron beam ($Q_z = 1$, $Q_r = 1$).

$$\mathbf{M}_L = \begin{pmatrix} 1 & \sin(2\alpha) & 0 & \cos(2\alpha)-1 \\ 0 & \cos(2\alpha) & 0 & -\sin(2\alpha) \\ 0 & 1-\cos(2\alpha) & 1 & \sin(2\alpha) \\ 0 & \sin(2\alpha) & 0 & \cos(2\alpha) \end{pmatrix}, \quad \text{with } 2\alpha = \beta L/v_0.$$

If the field in the entrance opening rises slowly, the entrance matrix is a mixture of \mathbf{M}_β and \mathbf{M}_L , but in this case L cannot be determined accurately.

Moreover, it is allowable to rotate the coordinate system. We do this only to simplify interpretation of the results. We rotate by the angle α at some point before the beam enters the inflector*, using

$$\mathbf{M}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha & 0 \\ 0 & \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha & 0 \\ 0 & -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

The complete matrix now becomes

$$\mathbf{M}_J \mathbf{M}_\alpha \mathbf{M}_L \mathbf{M}_\beta = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 2\sin\alpha & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{1}{2}\sqrt{6})\sin\alpha & (-\sqrt{6})\cos\alpha \\ 0 & 0 & (\frac{1}{6}\sqrt{6})\cos\alpha & (\frac{1}{2}\sqrt{6})\sin\alpha \end{pmatrix}. \quad (22)$$

The coupling sub-matrices have disappeared; the entire system behaves like a quadrupole lens system. In other types of deflectors it is not possible to

eliminate the coupling sub-matrices by arranging "drift-tracks" or quadrupoles. Only particular types of phase space populations can be passed through the inflector without loss of beam quality by means of such aids, as demonstrated in ²⁾ for a beam entering parallel into the inflector.

In comparison, the hyperboloid inflector is advantageous, because it enables the operation of most isochronous cyclotrons without any quadrupole adapting system, and because only isotrope (spherical) focussing means are required, that is, in those cases in which phase space sections in the (z, z') direction, in principle axis position and with an axis relation of 6:1 ($Q_z = \frac{1}{6}$) are acceptable within the cyclotron. Fig. 6 shows a phase space transfer of this type with a number of values L or α assumed. In this case the optimum beam quality is maintained in an extremely simple manner. Neither mirror-type deflectors nor the parabolic inflector described in ch. 4 have this property which is a feature only of the hyperboloid inflector.

3.4. POSITION AND SIZE OF THE HYPERBOLOID INFLECTOR IN THE CYCLOTRON

The dee configuration, the magnetic field and the acceleration voltage of a cyclotron as well as the point above which the beam is introduced axially (e.g. the machine center) are assumed as given. We postulate

* \mathbf{M}_α is interchangeable with \mathbf{M}_L and \mathbf{M}_β , but not with \mathbf{M}_J . Handling the spherical magnet lens with matrix methods requires that we apply the same matrix \mathbf{M}_α in order to take into account the turn in the image area.

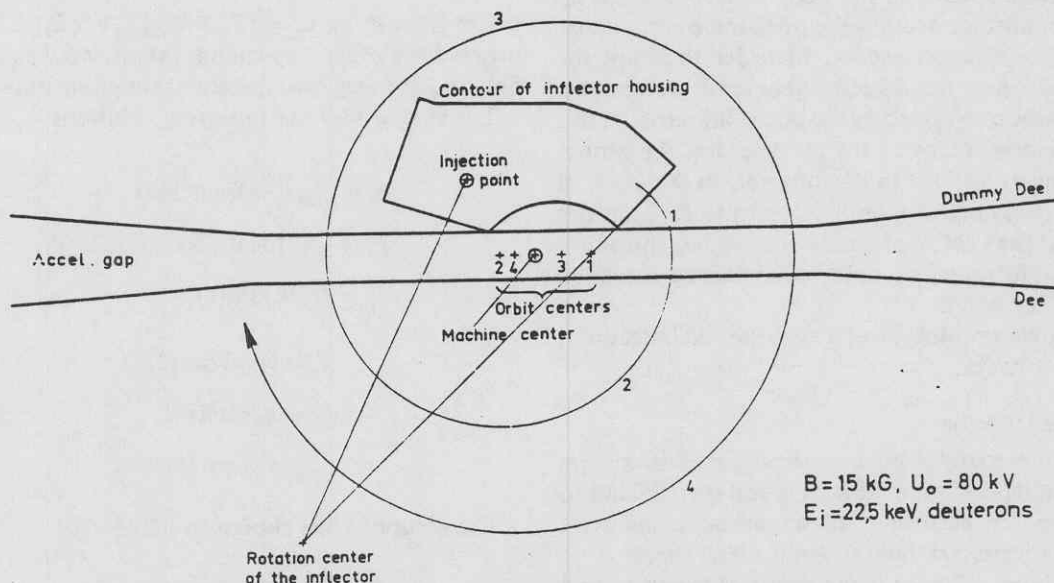


Fig. 7. Plan view of cyclotron with 180° dees and hyperboloid inflector ($r_0 = 10$ cm).

that the trajectory centers converge towards the center of the machine. The injection energy, the inflector size and the angle of rotation around the point of injection have to be matched. Where it is possible to neglect the width of the gap between the dees (this may be done in many cases) the problem can be solved by trial and error using compass and ruler. The problem cannot be solved generally for all types of cyclotrons, because in consequence of the discontinuous uptake of energy the radius and the direction of injection depend on the dee configuration.

In designing, we make use of the fact that the distance of the center of curvature of the ion beam leaving the inflector from the injection point is

$$d = \{49 - (20\sqrt{6})\cos[(\frac{1}{2}\pi)(\frac{1}{2}\sqrt{6}-1)]\}^{\frac{1}{2}} R_{\text{mag}} = 1.74 R_{\text{mag}}, \quad (8a)$$

where R_{mag} is the radius of curvature of the ion beam drifting freely in a homogeneous magnetic field.

To begin with, this is all we need to know; we shall ascertain only afterwards in which position the inflector will have to be relative to the acceleration system and whether the inflector can be accommodated in the dee system.

Fig. 7 shows, by way of example, an inflector in a cyclotron having 1 radiofrequency and 1 grounded dee. The point of the injection has been chosen to lie within the area occupied by an internal ion source which, in the case under consideration, has been removed; the direction of revolution of the particles, however, is reserved.

In cyclotron operation, the beam is fine-centered by turning the inflector around the injection point and by changing the injection energy. In order to adapt the beam curvature to the inflector geometry, we increase or decrease the average potential of the inflector; in this way, the kinetic energy of the particles has the proper value as long as they are in the inflector. In that case, of course, eq. (8a) no longer applies, because R_{mag} has not the same value as before. In addition, we may introduce a vertical adjustment in order to influence the axial position of the beam.

Fig. 8 shows a prototype of a hyperboloid inflector in which $r_0 = 10$ cm.

4. Parabolic inflector

While the electrodes of a hyperboloid inflector are easily manufactured on a lathe, it is still less difficult to manufacture the electrodes of a parabolic inflector, because it is necessary only to bend metal sheets.

The parabolic inflector is the result of trying to find

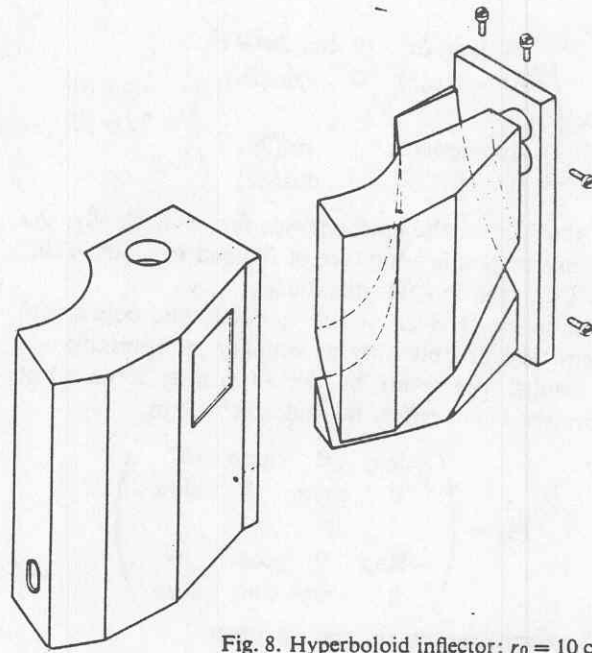


Fig. 8. Hyperboloid inflector; $r_0 = 10$ cm.

an inflector in which the electric field strength in one of the three space dimensions, for instance, in the y axis (Cartesian!) has no component wherever. The movement has to satisfy the equation of motion system

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= \varepsilon_x - \beta \dot{y} \\ \ddot{y} &= \beta \dot{x} \\ \ddot{z} &= \varepsilon_z \end{aligned} \right\}, \quad (23)$$

where $\beta = qB_z/m$, $\varepsilon_x = qE_x/m$ and $\varepsilon_z = qE_z/m$. We now proceed the other way round, that is, we seek solutions first and then try for a potential which satisfies eq. (23).

Let us consider the following solutions

$$\left. \begin{aligned} x_c &= \{v_0/(2k)\} \sin^2(kt) \\ y_c &= \{v_0/(4k)\} \{2kt - \sin(2kt)\} \\ z_c &= \{v_0/k\} \sin(kt) \end{aligned} \right\}, \quad (24)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_c &= (v_0/2) \sin(2kt) \\ \dot{y}_c &= v_0 \sin^2(kt) \\ \dot{z}_c &= v_0 \cos(kt) \end{aligned} \right\}. \quad (24a)$$

The solutions are chosen to make

$$\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2 + \dot{z}_c^2 = \text{const} = v_0^2, \quad (24b)$$

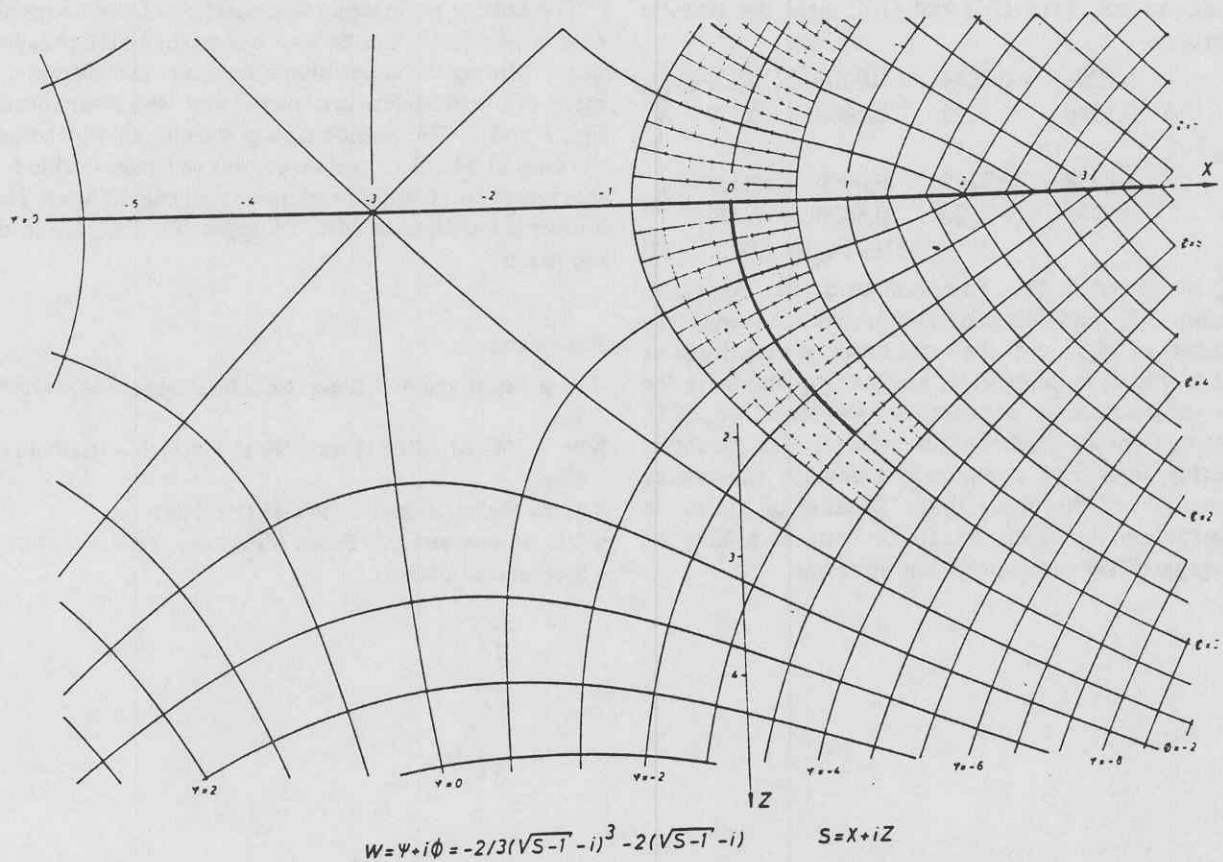


Fig. 9. Conformal mapping of the potential for the parabolic inflector with the real axis split at $X > 1$.

so that the particles move along the parabolic plane C expressed as

$$x_c = \{k/(2v_0)\} z_c^2. \quad (24c)$$

Let us now consider the consequence for the equation of motion (23). We insert and obtain

$$\left. \begin{aligned} \beta &= 2k \\ \varepsilon_x &= kv_0 \\ \varepsilon_z &= -k^2 z = -kv_0(dx/dz)_c \end{aligned} \right\}. \quad (25)$$

ε_x and ε_z have to take these values only on plane C . As it is, all these relations may be derived if we proceed from the second equation of (23), the third equation of (24) and from eq. (24b). Only the second assumption has been used deliberately, it has been taken over from the hyperbolic inflector.

The potential is expressed by conform representation found by transforming the parabola C upon the real axis and by introducing the proper scale by means of a second transformation. So

$$\left. \begin{aligned} s &= X + iZ = (2k/v_0)(x + iz) \\ w &= \psi + i\phi = -\frac{2}{3}\{(s-1)^{\frac{1}{2}} - i\}^3 - 2\{(s-1)^{\frac{1}{2}} - i\} \\ dw/ds &= -(s-1)^{\frac{1}{2}} + 2i = \partial\phi/\partial Z + i\partial\phi/\partial X = (\varepsilon_z + i\varepsilon_x)/(kv_0) \end{aligned} \right\}, \quad (26)$$

$$\left. \begin{aligned} (s-1)^{\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}Z + i \\ \phi &= 0 \\ dw/ds &= -\frac{1}{2}Z + i \end{aligned} \right\} \text{ on } C. \quad (26a)$$

Fig. 9 plots the potential function ϕ and the flow function ψ over the normalized space coordinates X and Z . It becomes evident from this representation how the electrodes of the parabolic inflector have to be shaped.

As only vanishing initial values would allow integration of the differential equations (23) as a whole, they have been linearized by expanding the electrostatic field in the neighbourhood of C .

Hence we have a system of Hill type linear equations which by numerical integration and using relations

similar to eqs. (11), (14) and (15), yield the transfer matrix,

$$\mathbf{M}_{jp} = \begin{pmatrix} 0.7263 & -0.3244 & 0.0000 & 0.3394 \\ 0.1386 & 0.9823 & 0.5000 & 0.2395 \\ 1.2738 & 0.3240 & 0.0000 & -2.3396 \\ 0.1543 & 0.2288 & 0.5000 & -0.3828 \end{pmatrix},$$

$$\text{Det } \mathbf{M}_{jp} = 1.000. \quad (27)$$

\mathbf{M}_{jp} is defined in the same manner as \mathbf{M}_j , eq. (16a), section 3.3, and directly comparable. Indeed, the elements of \mathbf{M}_{jp} are of the same order of magnitude as that of \mathbf{M}_j . It is impossible, however, to eliminate the side submatrices in a procedure similar to eq. (22). Contrary to the hyperboloid inflector the parabolic inflector does not completely eliminate the rotary degeneracy of the phase space. Because of its simple construction, however, it can be used as a kind of "surrogate" for the hyperboloid inflector.

The author is sincerely appreciative of the cooperation of Mr. E.-G. Conze who was particularly engaged in performing the experiments necessary in the development of the gauzeless ion mirror and who contributed figs. 1 and 2. The author also gratefully acknowledges the help of Mr. R. Engelhardt who was responsible for the figures and a number of numerical calculations. The author is indebted to Mrs. Schippers for translation of the paper.

References

- 1) W. B. Powell and B. L. Reece, Nucl. Instr. and Meth. 32 (1965) 325.
- 2) W. B. Powell, IEEE Trans. NS-13 (1966) 147 (Gatlinburg Conf.).
- 3) R. W. Müller, Z. angew. Phys. 18 (1965) 342.
- 4) J. L. Belmont and J. L. Pabot, IEEE Trans. NS-13 (1966) 191 (Gatlinburg Conf.).

STUDY OF AXIAL INJECTION FOR THE GRENOBLE CYCLOTRON

J. L. Belmont, J. L. Pabot

Cyclotron Laboratory

Faculte Des Sciences, Grenoble, France

I. Introduction

The injection of ions into a cyclotron via a hole drilled in the axis of the yoke presents many problems.

1) For an injected ion beam, of given energy eU , to be accelerated by the dees (RF Voltage V) and correctly extracted from the cyclotron, it is necessary that the centre of the first orbit coincide with a defined position.

2) The injection system must transform the vertical (i.e. axial) motion of the ions into a horizontal orbital motion centred at the correct position and in the magnetic median plane.

For the ions, the entrance into the magnetic field acts as a strong focusing lens, so that they must be injected accurately along the axis of the hole in the yoke. To eliminate magnetic field asymmetry the hole must be drilled precisely along the axis of the yoke. Thus, there is no possibility to move the injection axis.

3) After the end of the first revolution the accelerated beam is at a minimum distance from the deflector. Therefore, the increment ΔR of the orbital radius R for the first turn must be greater than half the horizontal dimension of the deflector gap plus the distance between the deflector and the dummy dee.

For the Grenoble cyclotron ΔR must be greater than 1.2 cm.

Consequently, the energy of the injected ions must be smaller than a fixed value which can be approximated as follows.

The injection radius R_0 is given by

$$R_0 = \frac{\sqrt{2UW}}{Bc} \sim \sqrt{\frac{U(kV)}{10}}$$

for the Grenoble cyclotron.

If $eW = m_0 c^2$ then

$$R_1 \text{ (after 1 turn)} \sim \sqrt{\frac{U + 4V \cos \theta}{10}}$$

for the Grenoble cyclotron $\theta = 50^\circ$,
 $V = 50 \text{ KV}$

$$\Delta R \sim R_1 - R_0$$

we have $U \leq 60 \text{ KV}$ for protons.

II. Planned Deflection Systems

a) We have been able to satisfy the above conditions by placing in the magnetic field an ordinary constant field electrostatic deflector. The ion path during the deflection process has the appearance of a helix, due to the action of the magnetic field (see pictures of the deflector).

The equations of motion are:

$$x = \frac{A}{2} \left[\frac{2}{1-4K^2} + \frac{\cos(2K-1)b}{2K-1} - \frac{\cos(2K+1)b}{2K+1} \right]$$

$$y = \frac{A}{2} \left[\frac{\sin(2K+1)b}{2K+1} - \frac{\sin(2K-1)b}{2K-1} \right]$$

$$z = -A \sin b$$

Where the z axis is the axis of the cyclotron, the $x-y$ plane is the median plane.

The electric field at the deflector entrance is along the x -axis.

A is the radius of curvature of the electric field.

b is a parameter ($0 \leq b \leq \frac{\pi}{2}$) such that the ion path length is given by $s = AB$.

R is the radius of curvature of the magnetic field.

$$K = \frac{A}{2R}$$

For a given injection energy eU , R is fixed and the only free parameter (A) does not allow the optimum positioning of the orbital centre, i.e. at the deflection exit.

b) We have therefore modified the effective magnetic field intensity along the deflector by means of an additional horizontal electric field (E) proportional to the horizontal component of the ion velocity. This produces a force on the ions proportional to and aligned with the force due to the magnetic field, and an effect equivalent to that produced by a change in the magnetic field intensity. The equations of motion thus remain the same.

To produce this electric field, we have inclined the electrodes at an angle β and slightly tapered the gap from 7 mm to 6 mm (see Fig. 1) such that the field E_v remains

constant and E_H has the calculated value. The equations given above remain the same if K is replaced by K' where

$$K' = K + \frac{k}{2} \quad \text{and} \quad \tan \beta = k \sin b$$

The advantage of such a system is that the centre of curvature of the ion trajectory at the deflector exit is not the same as the centre of curvature during deflection. k provides an extra parameter which can be used to place the beam orbital centre at the optimum position (see Fig. 2).

$$R_1 = \frac{A}{2K'} \quad \text{radius of curvature inside the deflector}$$

$$R_2 = \frac{A}{2K} \quad \text{radius of curvature at deflector exit}$$

It is not possible to alter the deflector geometry, so that the beam trajectory during deflection must remain constant for all ion extraction energies. As a result U and E must vary as B^2 , and for the beam to remain correctly centred, the cyclotron must be operated with constant orbital geometry. The cyclotron can be operated only in a limited energy range without changing the deflector system owing to technical limitations on the range of rf amplitude.

III. Results

a) Experimental Lay-out

In order to check the functioning of the deflection system, we have built an electron model using a vertical 1035 eV electron beam and a 42.5 gauss constant magnetic field, these parameters allowing us to construct a full-sized working model. After deflection into the horizontal plane, the electrons were accelerated by a dee system which simulated the cyclotron. Due to considerations of the orbital centre we chose the following parameters

$$A = 6 \text{ cm} \quad K = 1, 2 \quad K' = 1, 5$$

This system simulates proton injection at 62.5 KeV with a magnetic field of 14 500 gauss, and an rf amplitude of 50 KV, the voltage between the plates of the deflector being 18 KV.

b) Trials of the Deflection System

When used to deflect a parallel electron beam (with a circular cross-section, diameter 2.5 mm), we obtained a transmission factor greater than 95%. At the exit the beam size was 5-6 mm (vertically) and appeared to form an image 30 mm up stream from the exit. Horizontally the roughly parallel beam had a width of 1-2 mm.

c) RF System

We have devised a rf system to accelerate the electrons which gives a rf amplitude of 900 V

on the dees at a frequency of 120 MHz (see Fig. 5). We attempted before the experiment, to make an approximate calculation of the vertical focusing during acceleration, by considering the dee gaps as two slit lenses separated by a rf electric field (the computation is similar to that used in the Pitch equations for the calculation of the effect of two hole lenses separated by a constant field). The numerical calculation, for different phases, showed that the vertical beam divergence led to a loss of electrons during the first revolution. We have had to shield the deflector from the rf. The results of Fig. 5 were obtained using a probe 2.5 mm wide.

Conclusion

This injection principle has been shown to operate with electrons. We hope that it will also work with ions. The possibility of injection of relatively high energy (~50 KeV) protons allows us to hope that the reduction in the effects of space-charge will give us a high transmission factor for the passage through the yoke.

Due to this advantage one can use lower injection energies and thus obtain a variation in the energy of the extracted proton beam. We also think that this system will improve the acceleration and the extraction efficiency.

It must be pointed out that these first experiments gave us a beam at the 6th or 7th turn which was only a few per cent of the injected beam. This fact may however be explained by the rudimentary design of the dee system, which we have not had time to improve.

It is still true that an ion-model must be built to confirm the viability of this system.

References

- 1) W. P. Powell, B. L. Reece, M.I. and M 32, 325.
- 2) W. I. B. Smith, M.I. and M 9, 49.

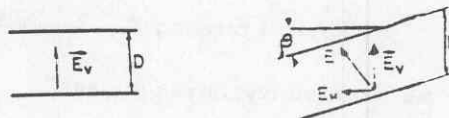


Figure 1.

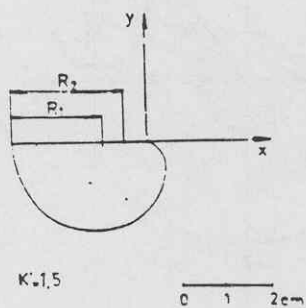


Figure 2.

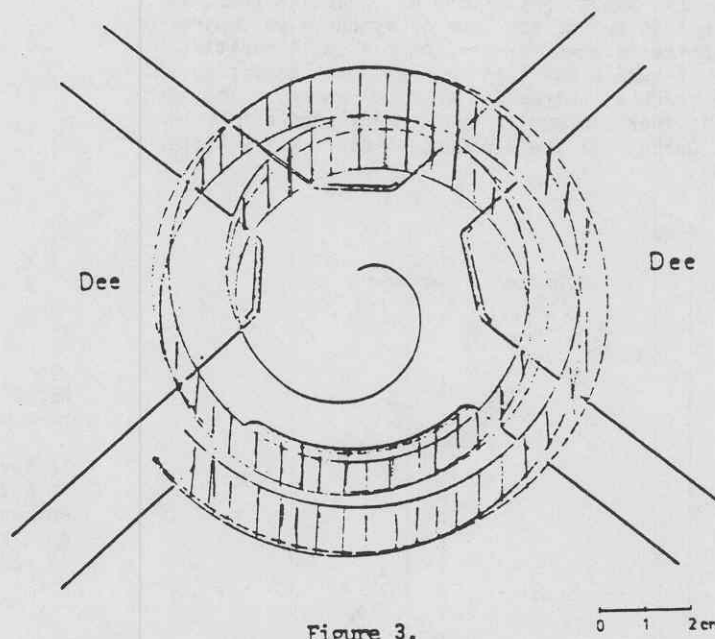


Figure 3.

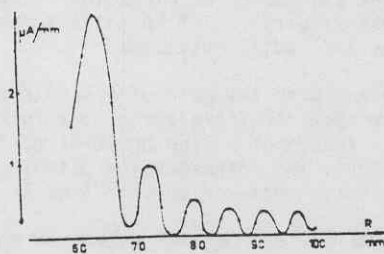


Figure 4.



The electrostatic deflector

Figure 5.

118

4. MECHANISM OF EMITTANCE GROWTH [5]

The emittance of a bunch in the ϕ, W space moves during compression and acceleration as shown on curve 1, fig 1. The central phase ϕ_c starting at injection from, say, -70° shifts due to the lack of synchronism towards 0° . In practice it goes further, onto a small positive value, in such a way that head and tail particles (A and B) reach at extraction an equal energy: the emittance is then symmetrical and energy spread is minimized. During all the process, however, W_A is larger than W_B .

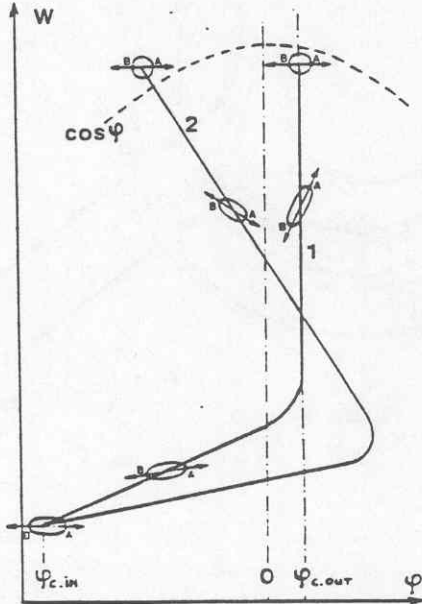


Fig. 1

Compression mechanism. Path of the bunch emittance in longitudinal phase space.

Curve 1 : standard scheme when no precession is used
Curve 2 : scheme for radial emittance growth compensation when precession is used.

The case studied was a high energy SSC (100 MeV/A output) for which relative energy gain and turn separation were small, thus requiring precessional injection. In the range of energy covered during acceleration, relativistic effects increase regularly the radial betatron frequency ν_r from injection to extraction by a little more than 0.1. Particle A previously considered has then always a ν_r larger than particle B and it performs more precessional betatron oscillations.

In radial phase space, the position of the emittances relative to head or tail of a bunch are at output as shown on fig. 2. Such a situation can lead to a large apparent emittance growth.

Let us call $2\Delta\psi$ the separation in phase of precessional oscillation of particles A and B, distant in longitudinal phase space during acceleration by $(2\Delta\phi, 2\Delta W)$. One has, rotating with the azimuth in the cyclotron :

$$\Delta\psi = \int (\nu_r / dW) \Delta W \cdot d\theta \quad (9)$$

and if, as it is approximately the case, $d\nu_r/dW$ is supposed constant during the main part of acceleration

$$\Delta\psi = 2\pi N \frac{\nu_{r, \text{out}} - \nu_{r, \text{in}}}{(W_{\text{out}} - W_{\text{in}})^2} \int_{W_{\text{in}}}^{W_{\text{out}}} \Delta W dW \quad (10)$$

As said, when ΔW is always positive, the integral cannot be null.

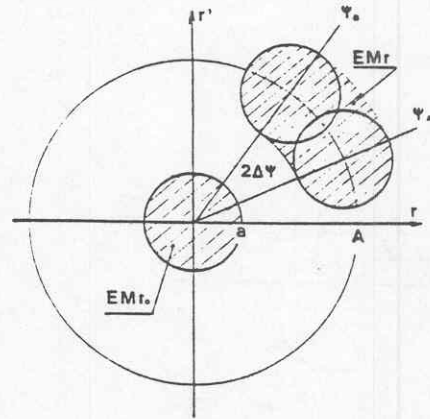


Fig. 2

Radial emittance growth. Particle A makes slightly more precessional oscillations than particle B.

In the case of fig. 2 where the injected beam is matched for betatron oscillations, with a radius a and an amplitude A of precession, the growth in r.m.s. emittance for a separation $\pm \Delta\psi$ in betatron phase space is approximately :

$$EM_r / EM_{r0} = \sqrt{1 + (2 A \Delta\psi / a)^2 / 3} \quad (11)$$

In order to limit the growth, one has to make sure that

$$\Delta\psi < k \cdot a / A \quad (12)$$

with $k = 1$ for 50 % growth and $k = 0,5$ for 15 %.

5. METHOD OF COMPENSATION

In the compression and acceleration scheme shown on fig. 1, if one lets the central phase ϕ_c drift to a slightly higher positive value, ΔW will reach 0 before the end of acceleration and then take negative values. Integral (10) will go down. It is clear that there exists a value of ϕ_c for which it goes through zero. There is then no emittance growth. The output energy spread, however, is large. If one finds a way to bring back ΔW to zero at the end of acceleration while (10) is also null, this situation will be satisfactory both for energy spread and radial emittance.

This can be obtained with the help of a very small change δB_0 of the magnetic field during the full acceleration precess, change of a sign opposite to the one used for compression. The corresponding path in longitudinal phase space is shown on curve 2 fig. 1.

Let us call ϕ_{c1} and $\pm \Delta W$, the central phase and energy difference between particles A and B at the end of compression, at energy W_1 . According to relations

$$d\phi_c / dW = - (2\pi h N / (W_{\text{out}} - W_{\text{in}})) \delta B_0 / B_0 \quad (13)$$

$$d(\Delta W) / dW = - \Delta\phi \cdot \sin\phi_c = - \Delta\phi \cdot \phi_c \quad (14)$$

one obtains by integration :

$$\Delta W_{\text{ex}} = \Delta W_1 + \left[\pi N h (W_{\text{out}} - W_1) / (W_{\text{out}} - W_{\text{in}}) \delta B_0 / B_0 - \phi_{c1} \right] (W_{\text{out}} - W_1) \Delta\phi_{\text{out}} \quad (15)$$

$$\int_{W_{\text{in}}}^{W_{\text{out}}} \Delta W dW = \int_{W_{\text{in}}}^{W_1} \Delta W dW + (W_{\text{out}} - W_1) \cdot \left[\Delta W_1 - \Delta\phi_{\text{out}} \phi_{c1} \cdot (W_{\text{out}} - W_1) / 2 + \Delta\phi_{\text{out}} \cdot \pi h N / 3 \cdot \delta B_0 / B_0 (W_{\text{out}} - W_1)^2 / (W_{\text{out}} - W_{\text{in}}) \right] \quad (16)$$

PRELIMINARY DESIGN OF A NEW HIGH INTENSITY INJECTION SYSTEM FOR GANIL

Ch. Ricaud, P. Attal, E. Baron, R. Beck, J. Bony, M.P. Bourgarel,
B. Bru, A. Chabert, S. Chel⁽¹⁾, R. Vienet⁽²⁾.

GANIL, BP 5027, 14021 CAEN Cedex, France

- (1) Present address: L'Orme des Merisiers, 91191 Gif-sur-Yvette Cedex, France.
(2) L.N.S. 91191 Gif-sur-Yvette Cedex, France.

ABSTRACT

In order to increase the beam intensities delivered by the GANIL injectors, which are presently limited either by space charge effects (light ions) or by low source currents (heavy ions), we are designing a new high efficiency injection system. A new beam line has been designed for an optimal matching of the beam in the six-dimensional phase space between the ECR ion source installed on a 100 kV platform and the first accelerating gap of injector cyclotron C01. The beam dynamics computation takes into account the spiral inflector associated with a small electrostatic quadrupole located immediately after. The principle and the design of the new injection system, as well as the expected performances, are described in this paper. The completion of this system is planned for the end of 1990.

INTRODUCTION

In parallel with the present modification for increasing the energy range (O.A.E.)⁽¹⁾, a second improvement of GANIL (O.A.I.) is presently in progress. It was born both from the request for high intensity Ar and Kr beams for exotic experiments, and from the brain-storming about the charge-space effect and the capability to carry the axial injection line efficiency to a better level.

Over the past years, the operation of the accelerator showed clearly that, due to space charge effects, the transmission between the source and the injector outputs⁽²⁾ decreases rapidly from 25 to 3.5 % when the source intensity raises (from 10 to 100 eμA for a 1.3 keV/A O²⁺ beam). If the ion source voltage is raised to 100 kV (maximum value imposed by voltage breakdowns in the inflector) instead of the present 15-20 kV, this efficiency is upgraded to 40%, due to both the velocity increase and the lengthening of the bunches. Thus, an intensity of 100 eμA (our reference beam is 15 keV/A Ar⁸⁺ for the rest of this paper) can be accelerated in the injector⁽³⁾. On the other hand, the beam line between the source and the cyclotron has not only to transport the beam without losses but must also provide the matching in the six-dimensional phase space into the cyclotron, through the inflector⁽⁴⁾.

Generally, only the betatronic matching is carried out, so that the best efficiency for this type of injection is always bound to the 10-20% range.

Taking into account the total phase space volume makes it possible to handle 300 to 400 eμA beams in the injection line and to accelerate 100 to 150 eμA intensity in the injector.

Finally, in order to take advantage of these improvements for the heaviest ions too, it was decided to increase the ECR source U.H.F. from 10 to 14 GHz and to design this CAPRICE type source with a 2B structure⁽⁵⁾. This new device will be associated with the second injector, modified like the first one⁽⁶⁾ which is connected to the 20 kV injection beamline (O.A.E.). A factor of three to five is expected from this operation with respect to the currents obtained with the O.A.E. In the following part we describe the conception and the status of the operation.

1. THE 100 kV EXTRACTION OPTICS

Two possible configurations are presently under study. The first one with a 20 kV extraction utilizes, as the previous injection line, a solenoid to focus the beam (and to moderately select the charges) just before the 100 kV electrode tube. In the second one, the beam is extracted and accelerated up to the final energy with a single 4 electrode tube followed by an Einzel lens.

*In both cases a virtual waist is adjusted in the focal plane of the analyzing magnet. Computations taking into account the space charge with the initial conditions that we tried to measure, use a computer code called FOCA, already in existence at SATURNE. This code deals only with axially symmetric beams (with a single charge state) where the space charge force varies linearly with the beam radius, and uses an analytical description of the fields. A more sophisticated code called SOSO⁽⁷⁾ was recently developed at GANIL. It uses a cartesian coordinate system which allows dealing with irregular density distributions in the phase planes. It is possible to treat a beam composed of several ion species (mass and charge state), which

allows in particular to take into account the ions issued from the support gas. Each ion species is represented by a limited number of particles (usually 100) and the lateral dimensions are defined as twice the rms value of the corresponding distribution. External forces can be calculated from any expression (analytical or numerical) of the fields and of their derivatives. As for the space charge forces, they are calculated using the method of the equivalent ellipsoid²⁾ and are applied through kicks at regular intervals along the line. No solution has been definitely adopted yet.

2. BEAM LINE

The beam extracted from the source has no time structure. On the other hand, the phase acceptance of the cyclotron is about 3.6 % (i.e. $\pm 6.5^\circ$ RF). In order to upgrade this yield, the beam line must contain a bunching device.

With the expected energy and intensity levels of the OAI operation (i.e. 100 eμA accepted by the cyclotron), the bunching yield depends on the space charge effect. It is to be noticed that the energy width of the beam is mainly generated by the bunching device, because it is very small (5 to 6 eV per charge state) at the source output. In order to control the situation arising from these facts, it is necessary to know precisely the beam characteristics at the exit of the source.

We have decided to design a beam line having separated optical functions (like the other beam lines of GANIL). The beam line can be divided in two main parts (fig. 1).

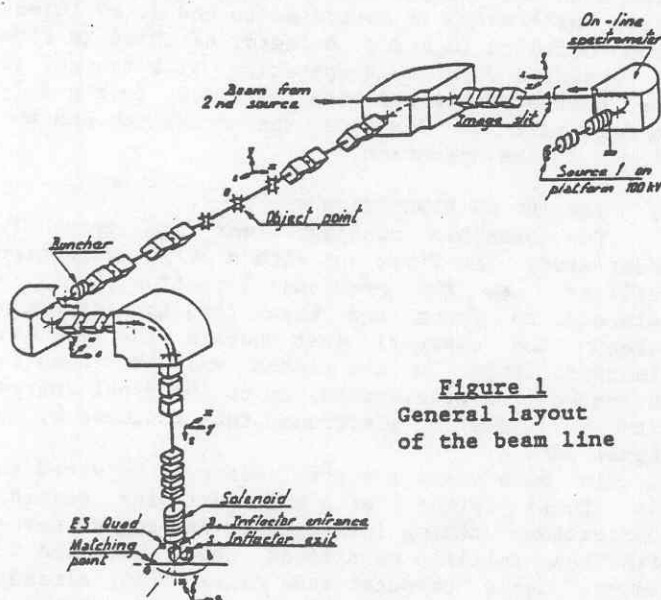


Figure 1
General layout
of the beam line

The first part guides the beam from the 100 kV platform, to point 0, which is the object point of the second part. At this point the beam has no time structure and is selected in charge state and in mass (resolution of 1 part in 250 for a $100 \pi \text{ mm} \cdot \text{mrad}$ beam emittance). In addition at point 0 the beam is considered not to have coupling between both transverse phase planes. However the longitudinal magnetic stray field³⁾ in the extraction region of the ECR source generates coupling between both transverse phase planes.

But, besides the classical focusing and bending functions, the beam line structure upstream point 0 contains (study in progress) optical elements to minimize the coupling between the transverse planes. Moreover, whatever the transverse emittances may be at the exit of the source, the beam is matched homothetically at point 0. Thus, the tuning of the second part of the beam line is independent from that of the first part. The drift space surrounding point 0 is equipped by a triple set of profile monitors and adjustable slits, to measure the transverse emittances and, if necessary, to reduce them.

The second part of the beam line extends from object point 0 to the matching point inside the cyclotron. It contains the inflector. Its optical sections and optical functions are presented at this conference⁴⁾. The value of the transverse acceptance is $70 \pi \text{ mm} \cdot \text{mrad}$.

The dipoles and quadrupoles are of a classical type. The skew quadrupole triplet of the horizontal/vertical correlation device is more compact (70 mm bore diameter, 100 mm length and 70 mm drift space) in order to reduce the beam dimensions. A skew quadrupole prototype with field clamps has given quite good results. The solenoid in the yoke hole has a .65 T maximum field. It has an additional winding to adjust the beam rotation. The buncher of double drift harmonic type (DDHB), produces 1.5 to 2 kV efficient voltage on harmonic number 1. About 20 % of this voltage is required on harmonic number 2. In the vertical part of the beam line, near the yoke hole, a space has been saved to insert a rebuncher in the future.

3. THE INFLECTOR

Among the existing inflectors, the spiral type^{9,10)} was chosen for this project in order to satisfy the following conditions.

At the present energy levels its height fits in the gap of the cyclotron. The energy of the central particle does not change when going through the inflector. Thus, the space charge effect is minimized. Moreover, the spiral inflector has a free parameter which can be used in order to center the horizontal inflector position with respect to the cyclotron.

The following study corresponds to a 120 mm height inflector. This value, corresponding to the theoretical one, must in the final project be reduced by about 10%, but the optical characteristics of the new inflector will be nearly the same.

In our case, the incoming beam is centered on the yoke axis. The inflector parameters are:

Maximum accelerating voltage	100 kV
Injection radius in the cyclotron	74.1 mm
Inflector height	120 mm
Gap width	15 mm
Length of the central trajectory	188.5 mm
Maximum voltage between electrodes	25 kV
Maximum electric field in the gap	16.67 kV/cm
Slant of the inflector edge at exit (with respect to the median plane)	41.4 deg.
Azimuth α_{opt} (with respect to the axis of acceleration)	61.85 deg.

Figure 2 shows the central geometry in the median plane of the cyclotron, the projection OS of the central trajectory in the inflector and the junction with the so-called first orbit in the cyclotron.

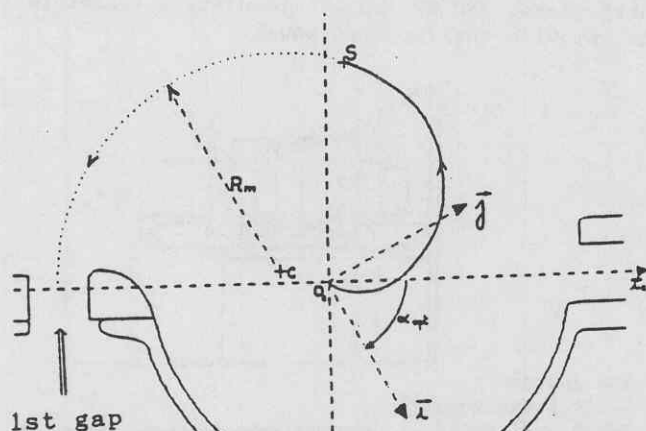


Figure 2

3.1 Field Calculations

We did not succeed in calculating analytically the first order development of the electric field around the central trajectory without adding an arbitrary first order term in view of restoring the maxwellian characteristic of the field. This additional term was chosen in order to simplify the analytical field expression, thus to define the two electrodes. The equipotentials, especially the electrodes, are rectifiable surfaces.

The potentials of the electrodes defined above are then calculated by a numerical method: a three-dimensional mesh is defined and the potentials on the points are calculated with a finite difference method¹¹⁾ (algorithm identical to that of the RELAXED 3D code¹²⁾).

Due to the discrete simulation of the electrodes, the field is slightly different from the theoretical one. In order to avoid this difficulty the potential on the mesh points near the electrodes are linearly fitted.

3.2 Beam Dynamics in the Inflector

Due to the electric and magnetic edge effects, the length of the electrodes, as compared to their theoretical value, have to be shortened by about 3 mm, at both ends of the inflector, in order to provide a 90° deflection and to obtain a central trajectory tangent to the median plane of the cyclotron.

The transfer matrix was obtained by calculating six particular trajectories (using the frames given in figure 5a of which initial conditions are defined in the following way: all the coordinates with respect to the central trajectory are equal to zero, except one. Different values of the non zero coordinate have been considered in order to examine the linearity of the transfer matrix terms.

Taking into account the conditions imposed at the matching point in the cyclotron and the acceptance of the inflector, we are led to introduce a) an electrostatic quadrupole between the inflector exit and the first accelerator gap, and b) an electrode-face rotation at the inflector exit. A value of 20° for the latter has been optimized as shown in figures 3 and 4.

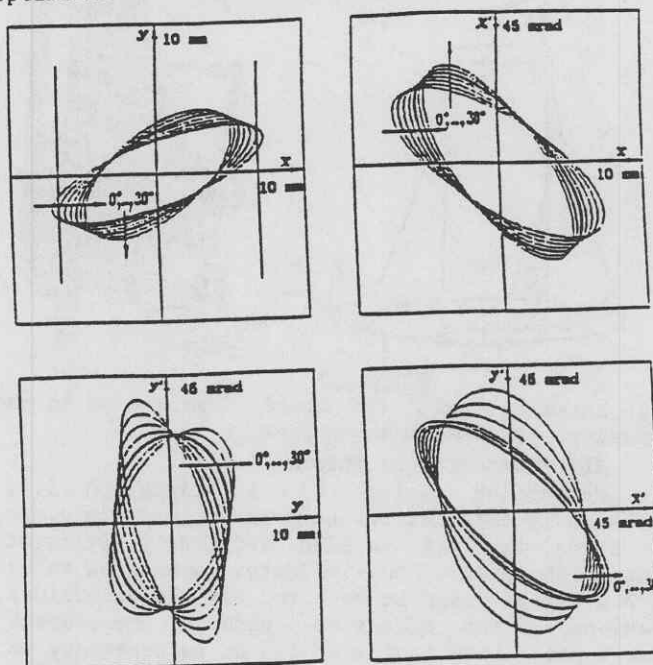
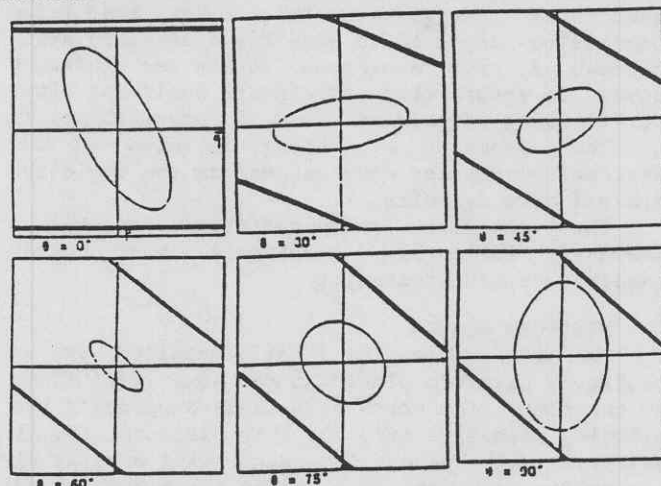


Figure 3

Evolution of the beam matching at the inflector entrance versus the electrode-face rotation value



Thick lines represent the electrodes

Figure 4

Beam cross section inside the inflector

A good agreement was found between the matrix method, and the numerical integration method, using the field map of the inflector. For this purpose, 400 particles have been randomly generated in the six-dimensional beam ellipsoid.

The space charge effect of the beam inside the inflector has been evaluated using the same method as code NAJO²⁾: up to 400e μA, the space charge effect is negligible.

3.3 Construction

A prototype was built (fig. 5b). We used the same machining method as L.W. ROOT¹²⁾. This prototype was put in the gap of the cyclotron. At a 1.55 T field level and 2.10^{-6} Torr residual pressure, a potential of +17 and -17 kV could be held.

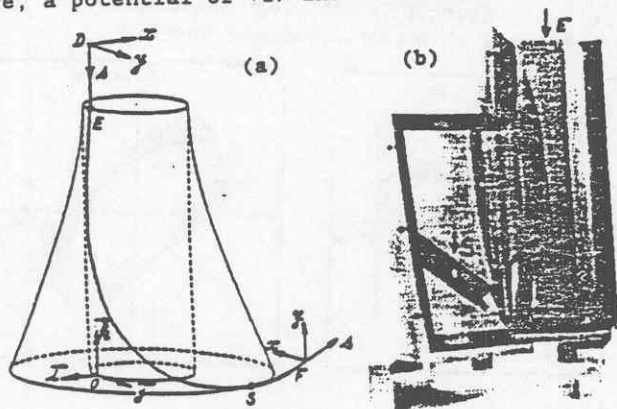


Figure 5

(a) Entrance, exit and fixed frames used in the dynamics. (b) Inflector prototype

4. ELECTROSTATIC QUADRUPOLE

Concerning point a) of paragraph 3.2, preliminary calculations have shown that, in order to focus the 0.6 cm high, vertically divergent beam at the exit of the inflector, a maximum value of 3.4 kV/cm^2 would be required for the electrical gradient if the effective length of the element were 4 cm; a bore radius of 1.5 cm is necessary to handle the 1 cm high beam inside this quadrupole, leading to a maximum voltage of $\pm 2.3 \text{ kV}$, which is easy to handle, even in a magnetic field. The 4 cm separation between the first and the second turn makes the design feasible, but the large diameter-to-length ratio requires a 3D-calculation (through a code analogous to the one mentioned above) to ensure that end effects would not alter the focusing properties. This 3D potential map is in the process of being included in our ray-tracing computer code devoted to the cyclotron internal beam dynamics.

The ultimate characteristics of the 3 elements: inflector, quadrupole and center geometry are not frozen yet.

5. PLATFORM DESIGN

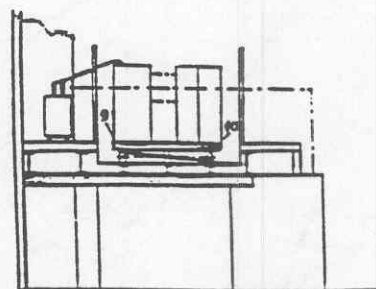
The ECR source will be installed on an insulated platform placed at the same level (3 m) as the floor (at earth potential) supporting the injection beam line (fig.6). This platform, 100 kV insulated with respect to ground, will consist of a metallic tank used as a casing for a reinforced concrete floor. It will be reinforced by nine pairs of insulators borne by the grounded floor.

The common point of each pair of insulators will be electrically and mechanically linked to the others and, in order to evenly distribute the potentials between them, it will be connected to the mid-point of the cooling pipes (2 circuits).

The epoxy-loaded insulators can hold 50 kV electrically and 50 tons mechanically. The $4.2 \times 3 \times 0.2 \text{ m}$ high voltage platform weighs about 5 tons when empty. The air gap between tank and ground is 0.5 m, and a removable metallic protection surrounds the following equipments:

- the ECR source, extraction, acceleration and focusing devices, including the vacuum system
- the power supplies for the coils of the source
- two electronic cabinets containing the control system and the high voltage supplies
- the UHF emitter.

The total weight of these equipments is 5 tons. A three-phase, 380 kV 150 kVA insulating transformer will provide the required power.



- 1 ECR source
- 2 Coils power supply
- 3 Additional coils power supply
- 4 Electronics
- 5 RF generator
- 6 Water cooling dispenser
- 7 Power dispenser
- 8 Transformer
- 9 Insulating hoses
- 10 Insulators
- 11 Door and retractable footbridge

Figure 6

General views of the platform

REFERENCES

- 1) Ferme, J., "Project 'OAE' at GANIL", in *Proceedings of 11th Conference on Cyclotrons*, Tokyo, (1986), pp. 24-30.
- 2) Baron, E., Beck, R., Bourgarel, M.P., Bru, B., Chabert, A. and Ricaud, Ch., "High intensity and space charge problems at GANIL", in *Proceedings of 11th International Conference on Cyclotrons*, Tokyo, (1986), pp. 234-237.
- 3) Baron, E. and Bourgarel, M.P., "Rapport 2, 5 - Proposition de modification de l'injecteur CO1", GANIL Internal Report 86/33R/IS/10.
- 4) Beck, R., Bru, B., Chel, S. and Ricaud, Ch., "Six-dimensional beam matching for axial injection into a cyclotron", presented at this conference.
- 5) Sortais, P. et al., "GANIL ECRIS status and development" in *Proceedings of the International Workshop on ECR Ion Sources*, Grenoble, (1988) C1, pp. 855-866.
- 6) Bourgarel, M.P., Baron, E. and Attal, P., "Modification of the GANIL injectors", presented at this conference.
- 7) Chabert, A., and Baron, E., "Programme SOSO", GANIL internal report (to be published).
- 8) Botman, J.I.M., Hagedoorn, H.L. and Reich, J., "The beam emittance of cyclotrons with axial injection system", in *Proceedings of the 1st EPAC*, Rome, (1988).
- 9) Belmont, J.L. and Pabot, J.L., "Study of axial injection for the Grenoble Cyclotron", IEEE Trans. Nucl. Sc. N513, 191, (1966).
- 10) Chel, S., "Etude de l'injection axiale d'un faisceau d'ions lourds dans un cyclotron compact", Thesis defended in Paris 7 (1988).
- 11) Bertrand, P., "Inflecteur de Pabot-Belmont, aspects numériques", GANIL Report PB 38.87.
- 12) Root, L.W., "Design of an inflector for the TRIUMF cyclotron", Thesis defended in Vancouver (1972).

SIX-DIMENSIONAL BEAM MATCHING FOR AXIAL INJECTION INTO A CYCLOTRON

A.R. Beck, S. Chel, B. Bru and Ch. Ricaud

GANIL, BP 5027, 14021 CAEN Cedex, France

ABSTRACT

The general optical structure of a beam line for axial injection into a cyclotron is proposed. It provides the beam matching in the six-dimensional phase space at the entrance of the cyclotron. As an illustration, the hyperboloid and the spiral inflectors are considered.

1. INTRODUCTION

The different kinds of existing inflectors for axial injection into cyclotrons generate couplings between the three phase planes. These couplings have to be controlled in order to get the best yield of injection in the six-dimensional phase space and therefore, to ensure the optimum transmission in the cyclotron.

The correlations required by the dynamics in the cyclotron can be obtained if the beam line associated with the inflector is designed in order to provide the corresponding correlations at entrance of the inflector.

After listing the required optical functions of the beam line, a general structure is proposed in view of easy optimization of its parameters.

The assumption is that the beam has no time structure and no betatron nor chromatic correlations at the beginning of the beam line.

As an illustration, we apply the described method to two types of inflectors, hyperboloid and spiral inflectors, that are studied in our laboratory.

Due to the low energy (a few keV/a.m.u.), space charge effects has often to be taken into account. A solution is proposed.

2. PRELIMINARY REMARKS

Any kind of axially injecting inflector always generates coupling between the vertical and the longitudinal phase planes. An example is the hyperboloidal inflector. In addition, some other types, like the spiral inflector, also generate a betatron and a chromatic coupling between the two transverse phase planes, thus leading to a coupling between the longitudinal and the

transverse phase planes.

The chromatic correlation generated by the inflector, or required by the dynamics in the cyclotron, have an opposed effect on the bunching efficiency. The influence depends on the transverse emittance value and on the phase acceptance in the cyclotron.

Now the questions are: 1) can the coupling effect generated by an inflector be controlled by classical optical elements (dipoles, quadrupoles, solenoids)? and 2) is a specific computer code necessary to optimize the parameters of the beam line including the inflector?

In the case of an ideal inflector (hard edge approximation), if the usual variables (canonically conjugated in the linear approximation of dipoles, quadrupoles and solenoids) are used, the 6×6 transfer matrix of the inflector is a canonical transformation. The symplectic conditions are verified. This does not necessarily imply that these variables are canonically conjugated inside the inflector.

However, a real axially injecting inflector has electric stray fields at entrance and exit. On the other hand the magnetic stray field in the hole of the yoke extends far upstream the inflector. The linear transformation of a real inflector is only canonical if its entrance is chosen in the region where the stray field is small and if its exit is chosen in the region where the velocity vector of the central particle is in the median plane of the cyclotron.

The fact that this transformation, including the inflector, exists, has the following consequence: a classical optical device consisting of dipoles, quadrupoles and solenoids, represented in the same variables by canonical transformations, can be associated with the inflector, in order to control its coupling effect.

If the transfer matrix of the inflector is known, the structure of the beam line can be defined and the parameters optimized with a classical beam optics code, in order to match the six-dimensional beam ellipsoid inside the cyclotron.

3. STRUCTURE OF THE BEAM LINE

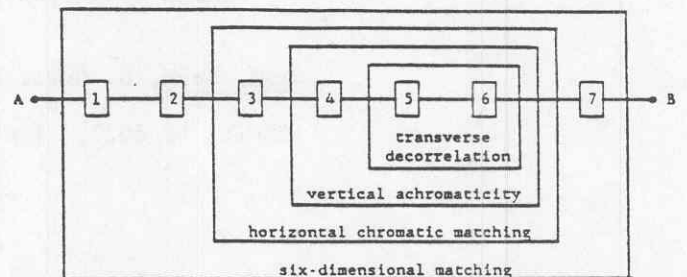
The optical functions of any kind of axially injecting beam line, the strictly necessary number of tuning parameters, and the required optical elements, are given in the following chart:

Optical function (matching inside cyclotron)	Number of parameters	Optical elements
Horizontal and vertical matching	4	4 quadrupoles
Horizontal chroma- tic matching	2	1 dipole 2 quadrupoles
Vertical chromatic matching	2	1 dipole 2 quadrupoles
Correlation matching between transverse phase planes	4	2 skew quadrupoles

This chart has to be completed with the following remarks:

- The buncher(s) must be located ahead of the chromatic matching structure that controls the phase terms depending on the betatronic conditions (even if the energy dispersion is small).
- It can be useful to add one quadrupole, especially in the chromatic sections, in order to reduce the beam dimensions.
- It can be useful to add a focusing element (for example an electrostatic quadrupole) between the inflector and the matching point inside the cyclotron, in order to reduce the beam dimensions at exit of the inflector. A rotated edge at the exit of the inflector can also be useful.
- If two skew quadrupoles are strictly needed to control the correlations between the two transverse phase planes, an additional skew quadrupole relaxes the constraint of the relative position of the quadrupoles and provides smaller beam dimensions.
- The chromatic planes of the two chromatic matching sections must be orthogonal. As a consequence, at least one section provides a 90° deviation.
- The angular orientation around the cyclotron axis should be chosen in the following way: if the transverse phase planes are uncorrelated at the matching point in the cyclotron, the chromatic plane of the cyclotron must correspond to the chromatic plane of the first chromatic matching section. If this orientation cannot be respected, a solenoid providing the required rotation can be put in the beam line.

If the number of tuning parameters is an important question, it is not less important to arrange the order of the optical section in view of getting easy calculation of the parameters and easy tuning of the beam line. The order of arrangement and the optical functions are given in the following diagram:



- A - entrance (transverse decorrelated beam, no time structure)
 B - matching point inside the cyclotron
 1 - transverse betatron matching device
 2 - buncher(s)
 3 - horizontal chromatic matching device
 4 - vertical chromatic matching device
 5 - horizontal/vertical correlation device
 6 - inflector
 7 - inside cyclotron, from inflector exit to matching point B.

4. AXIAL INJECTION WITH THE HYPERBOLOID INFLECTOR

In the previous canonical conjugated variables, the 6 X 6 transfer matrix of the inflector in the hard-edge approximation can be obtained analytically (1, 2):

0	0	0	$r/2$	0	0
0	0	$-2/r$	0	0	0
1	0	0	0	0	$-r/2$
0	1	0	0	0	0
0	$-r/2$	0	0	1	$\pi r/4$
0	0	0	0	0	1

where $r = 2\sqrt{6} R$ and R = magnetic injection radius.

This matrix is symplectic. It expresses the transformation between the entry of the inflector, where the radial direction is colinear to the electric field and its exit, where the radial direction is in the median plane of the cyclotron.

The term t_{52} is not equal to zero: this means that the inflector generates coupling between the vertical phase plane and the longitudinal one. In order to get at the exit of the inflector an achromatic beam, i.e. betatronic isochronism, only sections 1, 2 and 4 are required. However, if the matching point is located downstream the inflector exit, or if horizontal chromatic correlations have to be matched, section 3 is also required.

5. AXIAL INJECTION WITH THE SPIRAL INFLECTOR

As an example the inflector studied in the frame of GANIL's intensity upgrade project (3), the spiral inflector (4, 5, 7) is considered. No analytical transfer matrix could be found. It has been calculated numerically with the previous canonically conjugate variables. The symplectic conditions are verified with a good approximation.

-0.379729	+0.045822	+0.295503	-0.047215	0.	+0.048322
-7.032999	-1.402020	+4.901125	-0.291224	0.	-0.716805
-0.308074	-0.091233	-1.217808	+0.029571	0.	-0.232523
-3.177977	-1.412930	-11.857491	-0.413866	0.	-1.858233
-0.445569	+0.124100	+0.942818	+0.103268	1.	+0.061937
0.	0.	0.	0.	0.	1.

The couplings between the three phase planes generated by the inflector can be controlled if the beam line comprises all the optical matching devices mentioned in paragraph 3. Figure 1 shows a general layout of these sections. The beam line parameters have been optimized with our GALOPR code (6). Figure 2 shows the corresponding beam envelopes in the case of a chromatic matching.

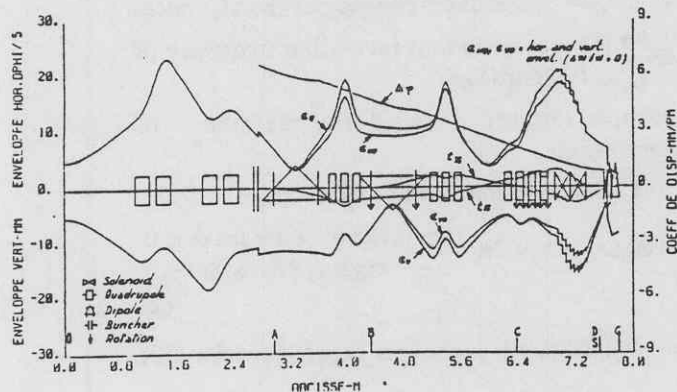


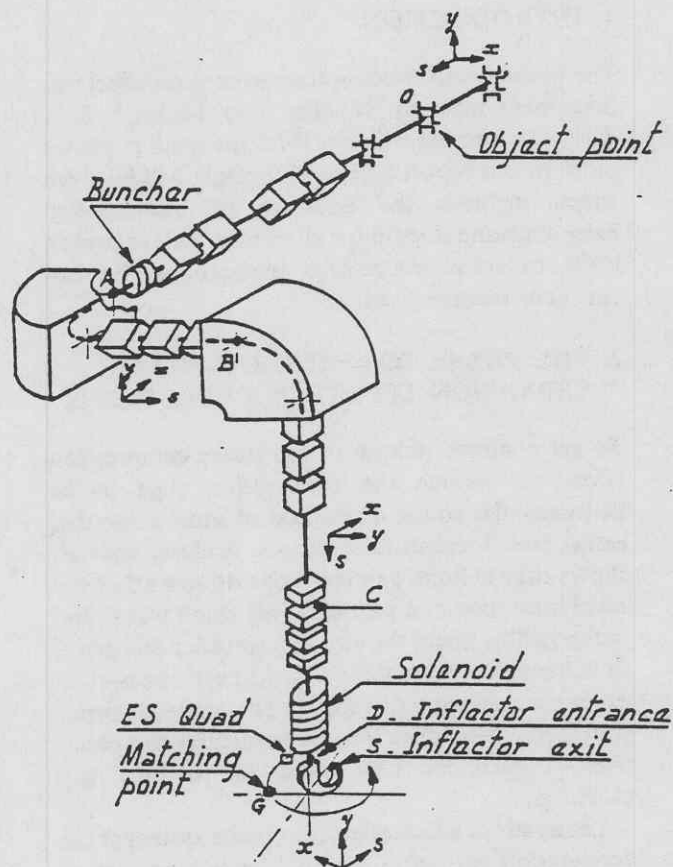
Figure 2. Beam envelopes.

6. SPACE CHARGE

With the beam line structure proposed in paragraph 3, the beam can still be matched in the six-dimensional phase space, if the space charge effects are taken into account. However, if the longitudinal space charge force becomes too important, the beam line has to be modified: the buncher(s) must be installed as downstream as possible i.e. at the entrance of the cyclotron yoke hole. Consequently, the energy width of the injected beam becomes larger and the chromatic matching sections are not required anymore. But a better solution consists in adding to the structure proposed in paragraph 3 a rebuncher, located at the entrance of the cyclotron yoke hole. The buncher(s) must then be tuned in such a way that the phase extension of the bucket coming in the rebuncher does not exceed $\pm 45^\circ$.

REFERENCES

- (1) Muller, R. W., "Novel inflectors for cyclic accelerators", NIM 54, (1967).
- (2) Beck, R., Bru, B. and Ricaud, Ch., "L'inflecteur hyperboloidal de R.W.Muller," GANIL report 86N/TF01 and 86N/TF02, (1986).
- (3) Fermé, J., "Present and future development at GANIL," GANIL report A88/06, (1988).
- (4) Belmont, J. L. and Pabot, J. L., "Study of axial injection for the Grenoble Cyclotron," IEEE Trans. Nucl. Sc. NS13, 191, (1966).
- (5) Chel, S., "Etude de l'injection axiale d'un faisceau d'ions lourds dans un cyclotron compact," Thèse soutenue à Paris 7 (1988).
- (6) Bru, B., "GALOPR, a beam transport program with space charge and bunching," in Proceedings of the 1st EPAC, Rome, 1988.
- (7) Attal, P., Baron, E., Beck, R., Bony, J., Bourgarel, M. P., Bru, B., Chel, S. and Ricaud, Ch., "Design of a new high intensity injection system for GANIL", presented at this conference.



Caption: DA = transverse betatron matching
AB = horizontal chromatic matching
BC = vertical chromatic matching
CD = transverse correlation matching
DG = inflector + el.-stat. quadrupole

Figure 1. General layout of the beam line.

APPLICATION OF THE PHASE COMPRESSION - PHASE EXPANSION EFFECT FOR ISOCHRONOUS STORAGE RINGS

WERNER JOHO

Swiss Institute of Nuclear Research (SIN) 5234 Villigen, Switzerland, and
TRIUMF, University of British Columbia, Vancouver B.C., Canada

In an isochronous cyclotron acceleration is accomplished through several acceleration gaps. A nonuniform voltage distribution along these gaps produces a time-varying magnetic field which affects the longitudinal bunch size. A radially increasing (decreasing) acceleration voltage compresses (expands) the bunch size. This effect can be utilized in an isochronous storage ring with $\lambda/2$ cavities, where particles undergo a cycle of acceleration, coasting at maximum energy, deceleration and coasting at minimum energy. This cycle could be repeated many times if H^- ions are injected into the ring and stripped to protons. Stored beams up to 100 A look feasible.

The phase expansion effect can also be utilized to improve the duty cycle of isochronous cyclotrons by a decreasing dee voltage towards the extraction radius or by insertion of decelerating C-electrodes like in the present improvement programs for several synchrocyclotrons.

1. INTRODUCTION

The phase compression-phase expansion effect was first mentioned by Mueller and Mahrt.¹ They derived a formula which is valid for small rf phases only. In this report a general formula will be given which includes the addition of 'flat-topping' harmonics and is valid for all phases. This extension leads to some interesting applications for isochronous storage rings.

2. THE PHASE COMPRESSION-PHASE EXPANSION EFFECT IN CYCLOTRONS

To get a simple picture of the phase compression effect we assume the acceleration gaps to be perpendicular to the orbits and of short azimuthal extent (small transit time effects). A closer analysis shows that oblique gap crossings do not affect the revolution time of a particle. This result was found in the 1930's, where the idea of a spiraling dee gap—to increase the energy of a classical cyclotron—was examined and soon discarded! The phase compression formula—derived for perpendicular gap crossings—is therefore also valid for oblique gap crossings.

Let us adopt a Cartesian coordinate system at the acceleration gap as shown in Figure 1 and let us assume the electric field of an acceleration gap to be constant over an effective gap width g and to be of the form:

$$\mathcal{E}_s(r, t) \equiv \mathcal{E}_s(r) \cos \omega_{rf} t \equiv \mathcal{E}_s(r) \cos \phi \quad (1)$$

$\omega_{rf} \equiv 2\pi\nu_{rf} = h\omega_0$ is the frequency of the rf system

$\omega_0 \equiv \frac{2\pi}{\tau_0}$ is the isochronous revolution frequency of the particles

h (positive integer) is called the 'harmonic' of acceleration

ϕ is the relative rf phase and defined by

$$\frac{d\phi}{dn} = \omega_{rf}\tau - 2\pi h = 2\pi h \frac{\tau - \tau_0}{\tau_0} \quad \begin{matrix} \text{leading phase: } \phi < 0 \\ \text{lagging phase: } \phi > 0 \end{matrix} \quad (2)$$

$$\frac{dE}{dn} = eV_G(R) \cdot \cos \phi \quad \text{is the energy gain per turn} \quad (3)$$

n = turn number

E = kinetic energy of particle

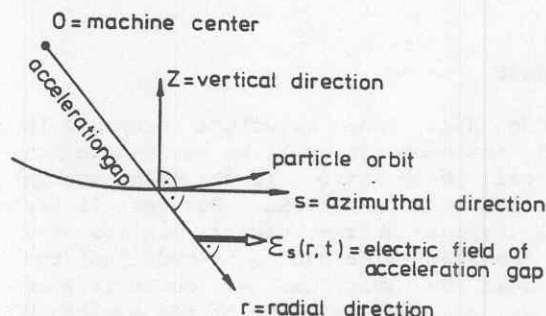


FIGURE 1 Coordinate system (r, s, z) adopted for the explanation of the phase compression-phase expansion effect. The assumptions are that the particle orbits are perpendicular to the acceleration gap and that the electric field is uniform across the gap.

$V_G(R)$ = peak voltage gain per turn
 τ = revolution time of particle
 R = average radius of particle orbit.

The magnetic field \mathbf{b} produced by a nonuniform acceleration gap is given by Maxwell's equation:

$$\mathbf{b} = -\text{curl } \mathcal{E}$$

$$b_z = -\frac{\partial \mathcal{E}_s(r)}{\partial r} \cos \phi$$

with the convention $' \equiv \frac{d}{dr}$ we get

$$b_z = -\frac{\mathcal{E}'_s}{\omega_{rf}} \sin \phi. \quad (5)$$

Thus a transverse gradient of the electric field produces a time-varying magnetic field which is 90° out of phase with the electric field (in most cyclotrons this magnetic field is located far outside the useful volume for acceleration). This rf magnetic field points in the vertical direction as does the static cyclotron field. It gives a horizontal deflection α_B to those particles which do not arrive at the moment of peak voltage across the acceleration gap. Thus the orbits of particles with different phases ϕ become different with a consequent change in revolution time and phase. The deflection α_B across the acceleration gap g is given by

$$\alpha_B = \frac{b_z g}{(B\rho)} = -\frac{\mathcal{E}'_s g}{\omega_{rf}(B\rho)} \sin \phi = -\frac{V'_{Dee}}{\omega_{rf}(B\rho)} \sin \phi \quad (6)$$

$V_{Dee}(R)$ = peak voltage gain across the gap
 $(B\rho)$ = magnetic rigidity of particle.

2.1. Nonrelativistic Classical Cyclotron

The effect of a nonuniform dee voltage on the beam is illustrated in Figures 2 and 3 for a homogeneous static magnetic field B_0 . We assume two acceleration gaps at 0° and 180° with radially increasing peak voltage ($V'_{Dee} > 0$).

For this special case the following results are easily obtained from geometrical considerations:

a) the fractional change in the revolution time is

$$\frac{\Delta \tau_\phi}{\tau(0)} \equiv \frac{\tau(\phi) - \tau(0)}{\tau(0)} = \frac{\alpha_B}{\pi} \quad (7)$$

which according to (2) leads to a contribution to the phase slip per turn of

$$\frac{d\phi}{dn} = -\frac{V'_G}{\omega_0(B\rho)} \sin \phi \quad (8)$$

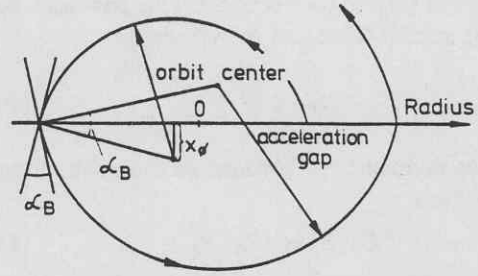


FIGURE 2 Orbit of accelerated particle in the case of a uniform external magnetic field in the z -direction and a 180° dee with radially increasing voltage. A particle with positive phase ($\phi > 0$) arrives late at the acceleration gap and gets a radially inward kick from the rf magnetic field. The ideal orbit center is displaced by a distance x_ϕ from the dee gap and jumps across the gap at each crossing.

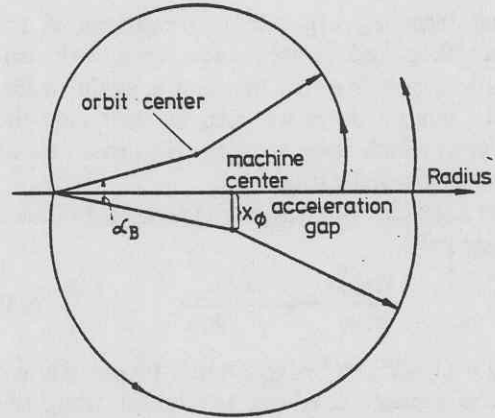


FIGURE 3 Same situation as in Figure 2, except that the particle arrives early ($\phi < 0$) at the acceleration gap and gets a radially outward kick which forces it on a longer path. Combining Figures 2 and 3 leads to a compression of the longitudinal bunch size.

b) the rf magnetic field displaces the orbit center perpendicular to the acceleration gap which leads to a *phase dependent center spread* x_ϕ given by

$$x_\phi = R \frac{\alpha_B}{2} = -\frac{V'_G}{4\omega_{rf} B_0} \sin \phi. \quad (9)$$

2.2 Relativistic Isochronous Cyclotron with Single rf System

We leave now the special case of Figures 2 and 3 and we will treat the *general case* of a *relativistic isochronous* cyclotron with a static magnetic field $B_z(r, \theta)$ and an arbitrary number of acceleration gaps. We assume that the change in voltage gain

117

$V_G(R)$ from turn to turn is small. This condition for *adiabatic* acceleration can be written as

$$E'_G \ll \frac{E}{R} \quad (10)$$

where we defined for convenience the peak energy gain per turn

$$E_G(R) \equiv eV_G(R). \quad (11)$$

The phase slip equation (2) can be split into two parts:

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dn} &\equiv \varphi_{ni} \text{ (nonisochronism)} \\ &+ \frac{d\phi}{dn} \text{ (nonuniform energy gain)} \end{aligned} \quad (12)$$

The first term φ_{ni} arises from deviations of the magnetic field and rf frequency from their isochronous values. We will mention it again in Eq. (26). For our purposes we need to treat only the second term which arises from the magnetic field of a nonuniform acceleration gap.

The rf field $b_z(r, \phi)$ changes the revolution time τ according to^{2,3}

$$\frac{\Delta\tau(\phi)}{\tau(0)} = -\frac{1}{\gamma^2} \frac{\langle b_z \rangle}{\langle B_z \rangle} \quad (13)$$

where $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ = relativistic factor, $\beta \equiv v/c$ $\langle \rangle$ means average over one revolution along the orbit.

From Eq. (5) we get:

$$\langle b_z \rangle = -\frac{\langle \mathcal{E}'_z \rangle}{\omega_{rf}} \sin \phi = -\frac{V'_G}{2\pi R \omega_{rf}} \sin \phi. \quad (14)$$

For positively charged particles and positive rotation of the beam around the cyclotron center $\langle B_z \rangle$ is negative. We therefore define

$$B_0(R) \equiv -\langle B_z(R) \rangle \text{ (positive)}. \quad (15)$$

Combining Eqs. (2), (13), (14) and (15) yields

$$\frac{d\phi}{dn} \text{ (nonuniform energy gain)} = -\frac{V'_G}{\gamma^2 B_0 R \omega_0} \sin \phi. \quad (16)$$

In order to proceed further let us list some well-known relations for isochronous cyclotrons (see, e.g., Ref. 3)

$$R_x = \frac{c}{\omega_0} = \text{cyclotron unit of radius}$$

$$B_{cu} = \frac{m_0 \omega_0}{e} = \text{cyclotron unit of magnetic field}$$

$$R_x B_{cu} = \frac{m_0 c}{e} = \frac{E_0}{ec} (= 31.3 \text{ kg.m for protons})$$

$$R = \beta R_x$$

$$B_0(R) = \gamma B_{cu}$$

$$B_0(R)R = \beta \gamma B_{cu} R_x = (B\rho) = \text{magnetic rigidity}$$

$$\frac{dE}{dR} = \frac{E_0}{R_x} \beta \gamma^3 = ec B_{cu} \beta \gamma^3. \quad (17)$$

With these relations Eq. (16) becomes

$$\frac{d\phi}{dn} = -\frac{dE_G}{dE} \sin \phi. \quad (18)$$

Combining Eqs. (3) and (18) we observe that the energy E and the rf phase ϕ are *canonically conjugate* variables with the Hamiltonian

$$H(E(n), \phi(n)) = E_G \sin \phi = \text{constant} \quad (19)$$

which leads to the 'equations of motion':

$$\frac{dE}{dn} = \frac{\partial H}{\partial \phi} = E_G \cos \phi \quad (20)$$

$$\frac{d\phi}{dn} = -\frac{\partial H}{\partial E} = -\frac{dE_G}{dE} \sin \phi. \quad (21)$$

Since the Hamiltonian H does not depend explicitly on the turn number $n \left(\frac{dH}{dn} \equiv \frac{\partial H}{\partial n} = 0 \right)$, it is a

constant of motion. This leads us to the important relation between peak energy gain and phase of a given particle during acceleration between two radii R_1 and R_2 of an isochronous cyclotron:

$$[E_G(R_1) \sin \phi(R_1) = E_G(R_2) \sin \phi(R_2)]. \quad (22)$$

This is a generalization of the result obtained by Mueller and Mahr¹ for small phases ($\sin \phi \approx \phi$). We obtain further

$$\frac{dE}{dn} \tan \phi = \text{const} \quad (23)$$

whereas differentiating (20) again yields

$$\frac{d^2 E}{dn^2} = E_G \frac{dE_G}{dE} = \frac{1}{2} \frac{d}{dE} (E_G^2), \text{ independent of phase.} \quad (24)$$

The big effect of a nonuniform acceleration gap on the phase-width of the beam (as illustrated by Eq. (22)), will be seen in the second stage of the *Indiana cyclotron*⁴ (operational in 1974). For protons the energy gain at injection (15 MeV) will be 4×75 keV = 300 keV, whereas at extraction (200 MeV) it will be 4×220 keV = 880 keV. For operation with a single rf frequency (no flat top) the relation between initial and final phase is given by (22):

$$\sin \phi_{\text{final}} = 0.35 \sin \phi_{\text{initial}}.$$

For example a bunch length of initially 20° will be compressed to about 7° during acceleration.

A slight phase compression will also occur in the SIN 590 MeV ring cyclotron which has four $\lambda/2$ rf cavities. Injection into the ring at 72 MeV occurs at 60 per cent, extraction at 85 per cent of the maximum energy gain per turn. An initial bunch length of about 20° will be compressed to 16° .

In many cases one is interested in an extracted beam with a high duty cycle for coincidence experiments. With a radially decreasing dee voltage one can indeed expand the phase width according to Eq. (22). At the same time one benefits from a smaller energy spread in the extracted beam. The disadvantage of this scheme is a lower extraction efficiency in conventional cyclotrons, where one relies on the turn separation for extraction with a septum. The improvement of the duty cycle with the phase expansion effect could however be most advantageous for H^- cyclotrons like TRIUMF, where the extraction by stripping is almost 100 per cent even with a low dee voltage.

The same phase expansion can also be achieved with decelerating C-electrodes at the extraction radius, as is foreseen for the improvement program for several synchrocyclotrons. In this case it is the time-dependent radial electric field at the inner edge of the C-electrodes which produces the required phase slip.

2.3 Relativistic Isochronous Cyclotron with Two Radiofrequency Systems

The addition of another radiofrequency system operating on the m th harmonic of the fundamental radiofrequency can alter the effective waveform of the acceleration voltage favorably for operation with high duty cycle or low energy spread (flat top). Second harmonic ($m = 2$) flat-topping will be avail-

able for the Indiana cyclotron,⁴ while SIN³ and TRIUMF⁵ will use the third harmonic ($m = 3$).

The addition of this frequency will modify the energy gain per turn of a particle:

$$\frac{dE}{dn} = E_{G1}(R) \cos \phi + E_{Gm}(R) \cos m(\phi - \phi_m) \quad (25)$$

where $E_{G1}(R)$ is the peak energy gain (positive in general) from the fundamental frequency, $E_{Gm}(R)$ the peak energy gain (negative for flat-topping) from the harmonic frequency.

Again the variables E, ϕ are canonically conjugate with the equations of motion derived from the Hamiltonian for the general case:

$$H = E_{G1}(R) \sin \phi + \frac{E_{Gm}(R)}{m} \sin m(\phi - \phi_m) - \int \varphi_{ni}(E) dE \quad (26)$$

$$\frac{dE}{dn} = \frac{\partial H}{\partial \phi} \quad \text{gives back Eq. (25)}$$

$$\frac{d\phi}{dn} = -\frac{\partial H}{\partial E} = \varphi_{ni}(E) - \frac{dE_{G1}}{dE} \sin \phi - \frac{dE_{Gm}}{m dE} \sin m(\phi - \phi_m). \quad (27)$$

φ_{ni} is the phase slip per turn in not quite isochronous cyclotrons as mentioned in (12). If we have a uniform acceleration gap and no flat-top harmonic Eq. (26) gives the well-known formula for the phase history of particles in a realistic cyclotron with imperfections:

$$\sin \phi(E_2) - \sin \phi(E_1) = \frac{1}{E_G} \int_{E_1}^{E_2} \varphi_{ni}(E) dE. \quad (28)$$

3. ISOCRONOUS STORAGE RING

An interesting application of the phase compression-phase expansion effect is an isochronous storage ring with $\lambda/2$ rf resonators. To be a bit more specific let us demonstrate the basic principle with a four sector ring cyclotron illustrated in Figure 4. The drawing is not to scale, since we do not specify anything on energy and radiofrequency. The

magnetic field of the sectors is shaped such that the revolution time for a closed orbit without acceleration is identical at all energies.

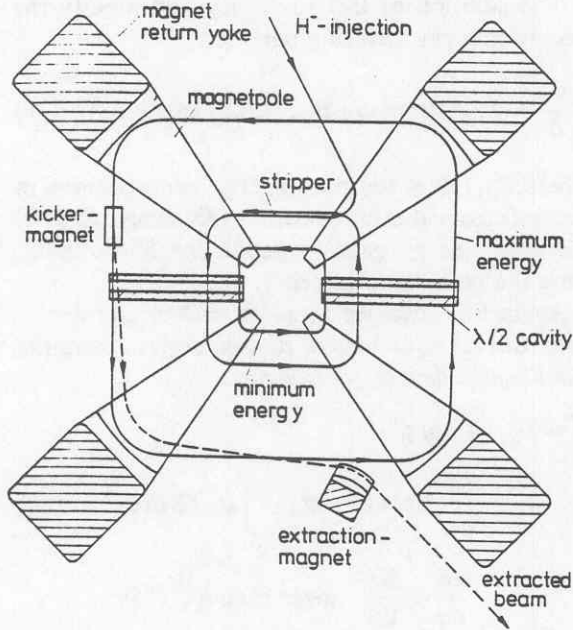


FIGURE 4 Schematic example of a four sector ring cyclotron used as a storage ring. H^- ions are injected into the cyclotron at a relatively low energy, stripped to protons and then accelerated up to a maximum energy, where they are decelerated again. The rf magnetic field of two $\lambda/2$ cavities drives the particles out of phase at the endpoints of the cavity. The protons oscillate thus between a minimum and maximum energy in the cyclotron. Extraction of the stored beam is not an easy problem and one possibility is indicated in the diagram with a pulsed kicker magnet.

For a really relativistic cyclotron there would be more than four sectors necessary and they would have to be spiralled to provide adequate vertical focusing. Between the magnet sectors are rectangular $\lambda/2$ -cavities operating in the so-called H_{101} -mode (SIN-cavities⁶) as illustrated in Figure 5.

For a perfect rectangular box of length L and height H the resonant frequency for this mode is given by

$$v_{rf} = \frac{c\sqrt{L^2 + H^2}}{2LH} \quad (29)$$

The minimum—or cutoff—frequency is obtained for $H = \infty$:

$$v_{rf}(\min) = \frac{c}{2L} \quad (30)$$

The insertion of lips around the acceleration gap lowers this frequency without affecting the high Q -value substantially. These cavities provide a peak energy gain per turn of the form

$$E_G(R) = E_p \sin \pi \frac{(R - R_0)}{L} \quad (31)$$

With the definition

$$W \equiv \pi \frac{(R - R_0)}{L} \quad R = R(E) \quad (32)$$

the Hamiltonian (19) becomes

$$H = E_p \sin W \sin \phi = \text{const} \quad (33)$$

$$\frac{dE}{dn} = \frac{\partial H}{\partial \phi} = E_p \sin W \cos \phi \quad (34)$$

$$\frac{d\phi}{dn} = -\frac{\partial H}{\partial E} = -\frac{\partial H}{\partial W} \frac{dW}{dE} = -\frac{\pi E_p}{L(dE/dR)} \cos W \sin \phi.$$

Using $\frac{dE}{dR}$ from (17) leads to

$$\frac{d\phi}{dn} = -\mu \cos W \sin \phi \quad (35)$$

$$\frac{dW}{dn} = \mu \sin W \cos \phi \quad (36)$$

$$\mu \equiv \frac{\pi R_\infty E_p}{\beta \gamma^3 L E_0} \quad (37)$$

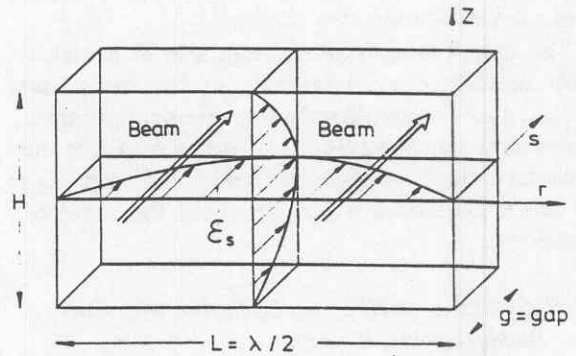


FIGURE 5 Geometry of a rectangular $\lambda/2$ cavity (SIN cavity operating in the H_{101} -mode). There is only an electric field component E_s with a sinusoidal distribution in the r - and z -direction. The rf magnetic field is confined in the (r, z) -plane and the beam passes through the cavity in the s -direction.

The curves $H = \text{constant}$ given by (33) are illustrated in Figure 6. The fixpoints are given by

$$\frac{d\phi}{dn} = \frac{dE}{dn} = 0:$$

$$W = \pi/2 + j\pi, \phi = \pi/2 + l\pi \quad \text{stable fixpoint (38)}$$

$$W = j\pi, \phi = l\pi \quad \text{unstable fixpoint (39)}$$

$j, l = \text{integers.}$

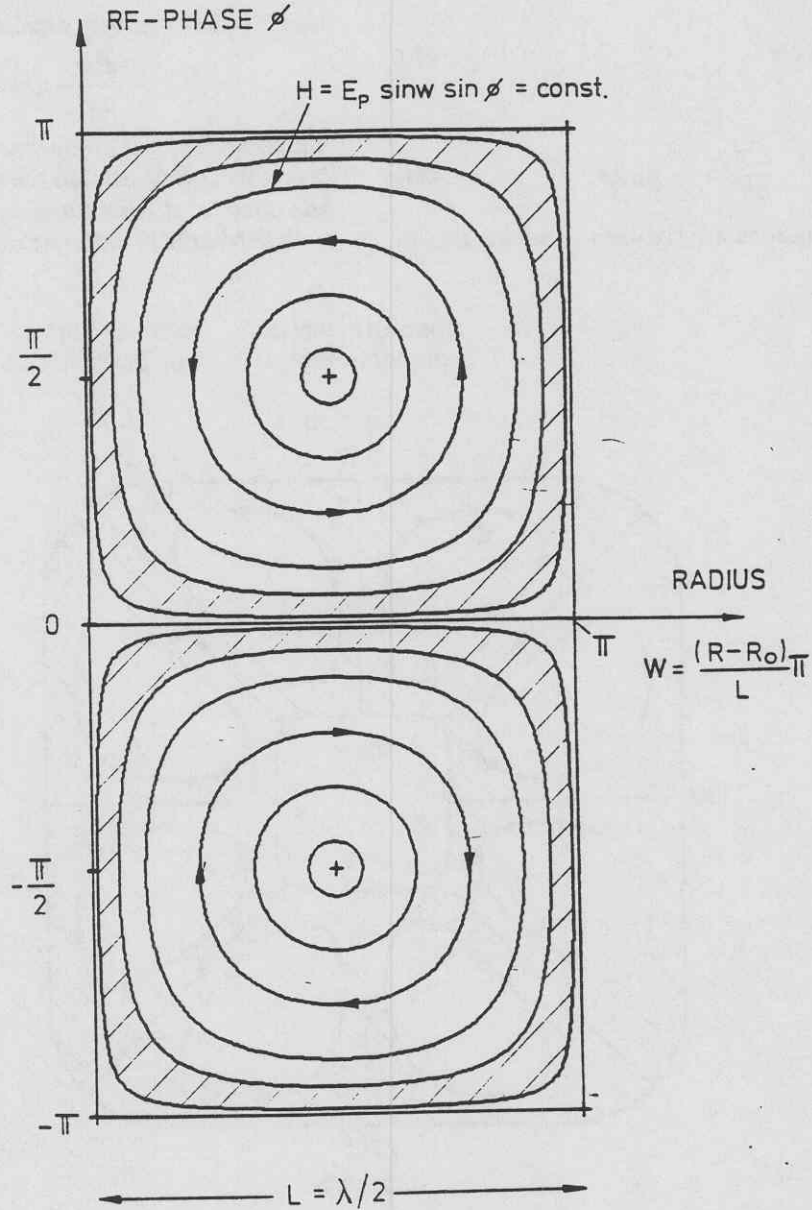


FIGURE 6 Particle trajectories in phase space (radius or W , rf phase ϕ) of an isochronous storage ring with cavities of a single frequency. The center of the squares represent stable fixpoints and the corners unstable fixpoints. The two hatched rings contain particles with phases between 2° and 10° respectively -2° and -10° in the center of the cavities at $W = \pi/2$. The cavity walls are located at $W = 0$ and $W = \pi$.

Around the stable fixpoint $W = \pi/2$, $\phi = \pi/2$, μ can be regarded as constant, which decouples Eqs. (34) and (35)

$$\frac{d^2 E}{dn^2} \approx E_p \left(\frac{dW}{dE} \frac{dE}{dn} \cos W \sin \phi + \frac{d\phi}{dn} \sin W \cos \phi \right) \\ \approx \mu E_p \sin W \cos W$$

$$\frac{d^2 E}{dn^2} \approx \frac{\mu}{2} E_p \sin 2W \quad (40)$$

and similarly

$$\frac{d^2 \phi}{dn^2} \approx \frac{\mu^2}{2} \sin 2\phi. \quad (41)$$

These two equations are similar to the equation of

a rigid pendulum or to the longitudinal motion in a synchrotron (without acceleration).

Expanding the phase ϕ around $\frac{\pi}{2}$

$$\phi \equiv \frac{\pi}{2} + \psi \quad \psi \ll 1 \quad (42)$$

leads to the harmonic oscillator equation:

$$\frac{d^2 \psi}{dn^2} + \mu^2 \psi = 0 \quad (43)$$

which shows that μ —given by (37)—is the oscillation frequency around the stable fixpoint. $2\pi/\mu$ is the number of revolutions necessary for one cycle.

Braun⁷ at SIN did some numerical studies with a

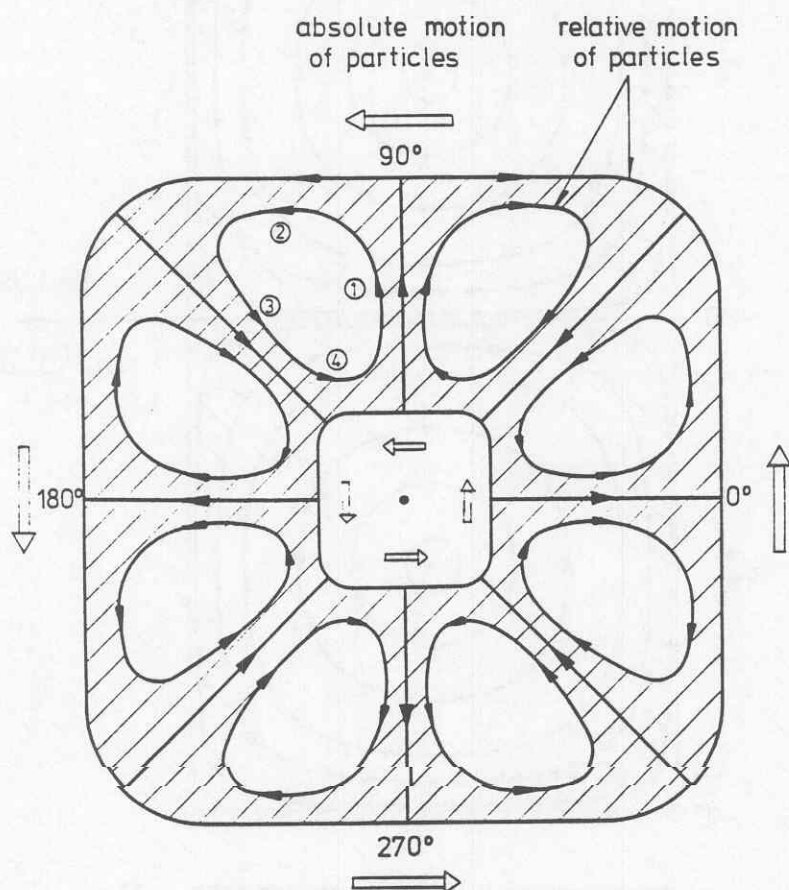


FIGURE 7 Snapshot of particle distribution in the four-sector cyclotron of Figure 4. For graphical simplicity the harmonic number of acceleration is chosen as 4. With uniform acceleration gaps we would thus have only the 4 bunches at the azimuths 0° , 90° , 180° , 270° . With $\lambda/2$ cavities all particles undergo a periodic cycle of acceleration ①, drifting at maximum energy ②, deceleration ③ and drifting at minimum energy ④. At intermediate energies the beam is strongly bunched while at the extreme energies we have practically a dc beam.

hypothetical short $\lambda/2$ cavity in the 590 MeV isochronous ring cyclotron. Formula (37) for the oscillation-frequency μ explains his results very well.

The (W, ϕ) -diagram of Figure 6 shows that even in a perfectly isochronous cyclotron the particles can never be accelerated into the cavity walls—if condition (10) is fulfilled. The rf magnetic field which is strongest at the walls is changing the revolution time of the particles till they get out of phase with the electric field and are decelerated again. This effect could thus be used for storing particles in an isochronous ring. The basic idea is illustrated in Figures 4 and 7.

H^- ions would be injected into the ring cyclotron at some intermediate energy and stripped to protons. These are accelerated to a maximum radius—which depends on the initial rf phase—decelerated to a minimum radius and accelerated again, performing thus a periodic cycle. To avoid particles with phase 0° interfering with the cavity walls at the extreme radii one can separate the cavity completely along the median plane into an upper and a lower part. This is possible since in the H_{101} -mode there are no surface currents inside the cavity across the median plane. One can also avoid particles getting close to the minimum and maximum radius by filling two separate phase-intervals on both sides of 0° . This could be done by injecting beam with negative phases for a while and then switching to positive phases. The stored particles fill finally two ring areas in (W, ϕ) phase space as indicated in Figure 6. For this example the particles occupy phases between -2° and -10° and between $+2^\circ$ and $+10^\circ$ in the middle of the cavity, whereas at the inner and outer radius the beam fills almost all phases.

Thus a bunched beam at intermediate energy is transformed into a practically dc beam at high and low energy. Since E, ϕ are canonically conjugate variables the flow of particles in (E, ϕ) phase space is governed by Liouville's theorem (constant phase-space density, incompressible fluid). Figure 6 and Eqs. (35), (36) show that the beam spends most of its time at the inner and especially at the outer radii. This feature is very desirable for *fast extraction* and for *keeping the stored beam away from the stripper*.

3.1. Storage Ring with Addition of Flat-top Cavities

The above-mentioned characteristic of an iso-

chronous storage ring can be further improved with the addition of 3^{rd} harmonic cavities. These flat-top cavities would have the same radial length L but three times the resonant frequency of the main cavities. They would operate in the so called H_{103} -mode with a voltage waveform given by

$$V_3(R, \phi) = V_{3p} \sin 3\pi \frac{(R-R_0)}{L} \cos 3\phi. \quad (44)$$

The combined peak energy gain per turn of the main and flat-top cavities is thus modified from (31) to

$$E_G(R) = E_p \left[\sin \pi \frac{(R-R_0)}{L} - \mathcal{E}_3 \sin 3\pi \frac{(R-R_0)}{L} \right] \quad (45)$$

and the new Hamiltonian $H(E(n), \phi(n))$ becomes

$$H = E_p \left[\sin W \sin \phi - \frac{\mathcal{E}_3}{3} \sin 3W \sin 3\phi \right] = \text{const.} \quad (46)$$

Curves $H = \text{const}$ for different initial conditions are plotted in Figure 8 with $\mathcal{E}_3 = 0.3$. The hatched rings contain phases from -2° to -10° and from 2° to 10° at $W = \pi/2$ in the middle of the cavity.

The equations of motion are given by:

$$\frac{dE}{dn} = \frac{\partial H}{\partial \phi} = E_p [\sin W \cos \phi - \mathcal{E}_3 \sin 3W \cos 3\phi] \quad (47)$$

or for W

$$\frac{dW}{dn} = \mu [\sin W \cos \phi - \mathcal{E}_3 \sin 3W \cos 3\phi] \quad (48)$$

$$\frac{d\phi}{dn} = -\frac{\partial H}{\partial E} = -\mu [\cos W \sin \phi - \mathcal{E}_3 \cos 3W \sin 3\phi]. \quad (49)$$

Note that μ is dependent on radius as given by (37) and that the connection between β and W is

$$\beta = (\beta_{\max} - \beta_{\min}) \frac{W}{\pi} + \beta_{\min} \quad (50)$$

$$\beta_{\min} = \frac{R_0}{R_\infty} \text{ and } \beta_{\max} = \frac{R_0 + L}{R_\infty} \text{ determine}$$

the minimum and maximum energy of the storage ring.

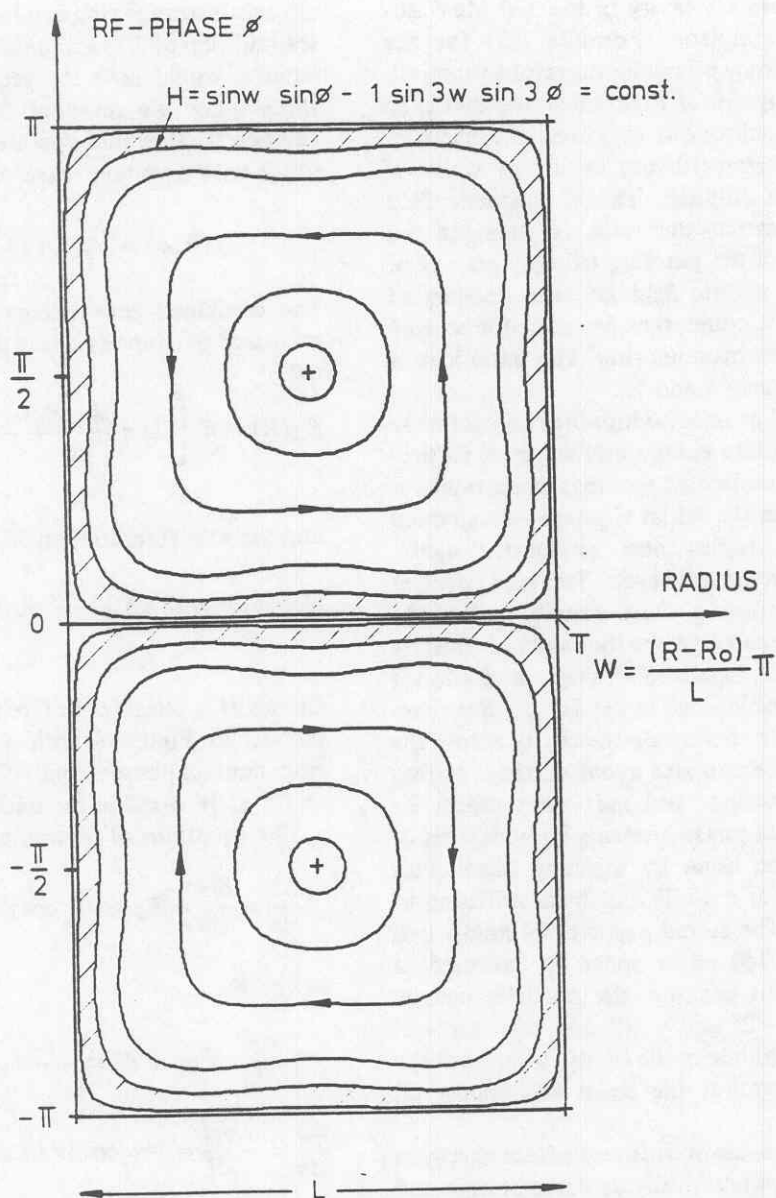


FIGURE 8 Same situation as in Figure 6 except that there are two different types of rf cavities with frequencies ν_{rf} and $3\nu_{rf}$ operating in the modes H_{101} and H_{103} respectively (flat-top operation).

3.2. Numerical Example

To get a better quantitative picture of the particle trajectories in (radius, ϕ)-phase space of a storage ring, let us look at a ring cyclotron operating between $\beta_{\min} = 0.23$, $E_{\min} = 26$ MeV and $\beta_{\max} = 0.75$, $E_{\max} = 500$ MeV. The orbital frequency and thus the size of the machine is still flexible,

although one could have something in mind similar to the SIN 590 MeV cyclotron.

Figure 9 shows four representative particle trajectories—inside a hatched ring of Figure 8—obtained from numerical integration of Eqs. (48) and (49).

Figure 10 shows the radial particle density of a

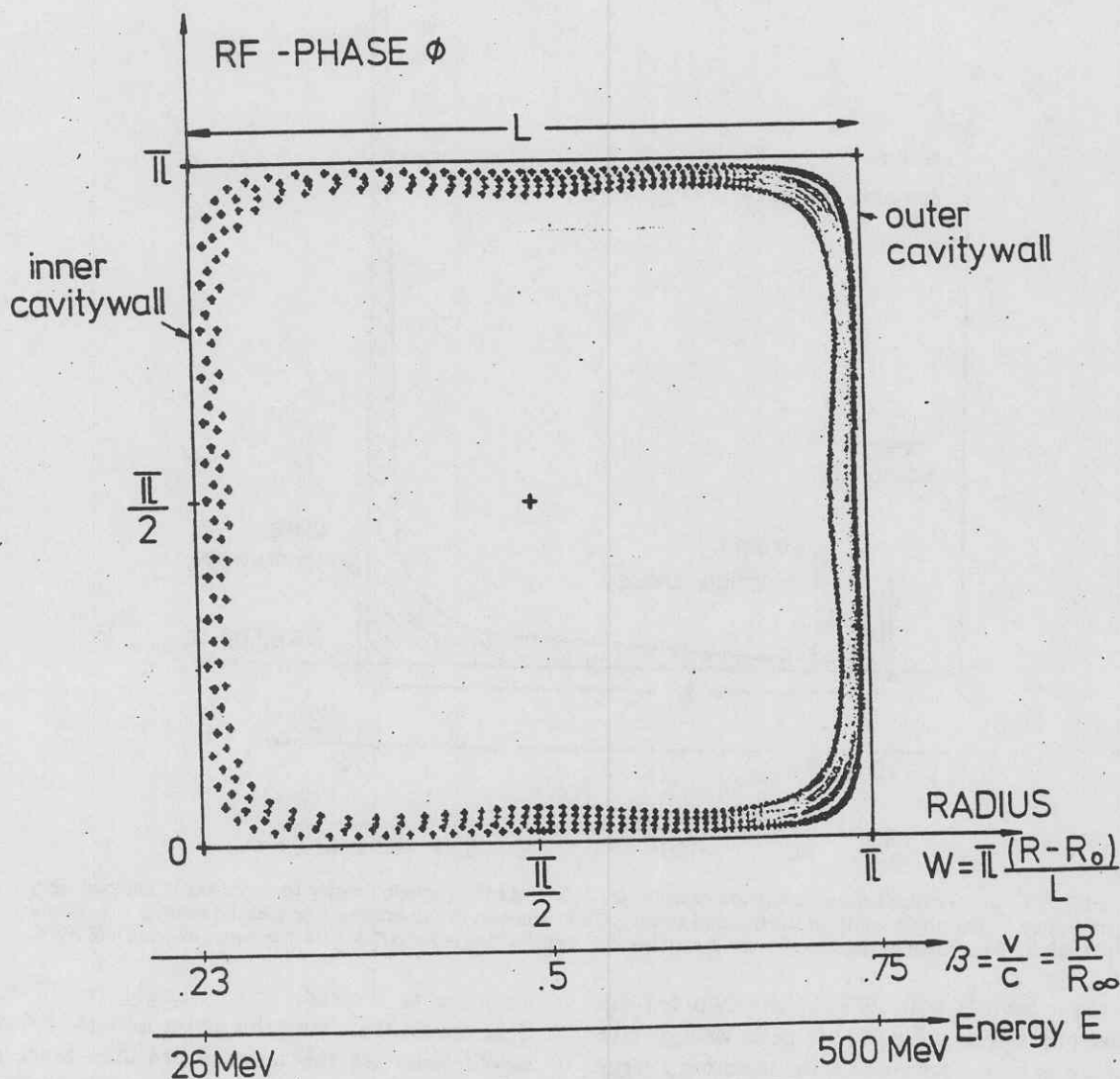


FIGURE 9 Four particle trajectories in (radius, ϕ) phase space inside hatched ring of Figure 8. The example of a storage ring operating between 26 and 500 MeV was chosen.

stored beam neglecting finite emittance effects. The ratio of the two peaks at the minimum and maximum energy is given approximately by the ratio of the corresponding μ -values:

$$\frac{\mu_{\max}}{\mu_{\min}} = \frac{\beta_{\max} \gamma_{\max}^3}{\beta_{\min} \gamma_{\min}^3}$$

which is about 9 for our example. About 50 per cent of the stored beam is contained in a small radial interval of $\Delta R = 0.04L$ between 420 and 470 MeV. This storage ring is actually an acceleration—and

storage ring, since the H^- beam can be injected at an energy as low as 45 MeV.

The interesting question is of course: How much current can be stored in such a cyclotron?

Again, to get some feeling for the numbers involved, let us assume that the above-mentioned 500 MeV storage ring has a minimum radius of 1.5 m and a maximum radius of 5 m. The isochronous revolution time for a particle is then about 140 nsec. The rf cavities are then about 3.5 m long and could operate, e.g. on 50 MHz and 150 MHz.

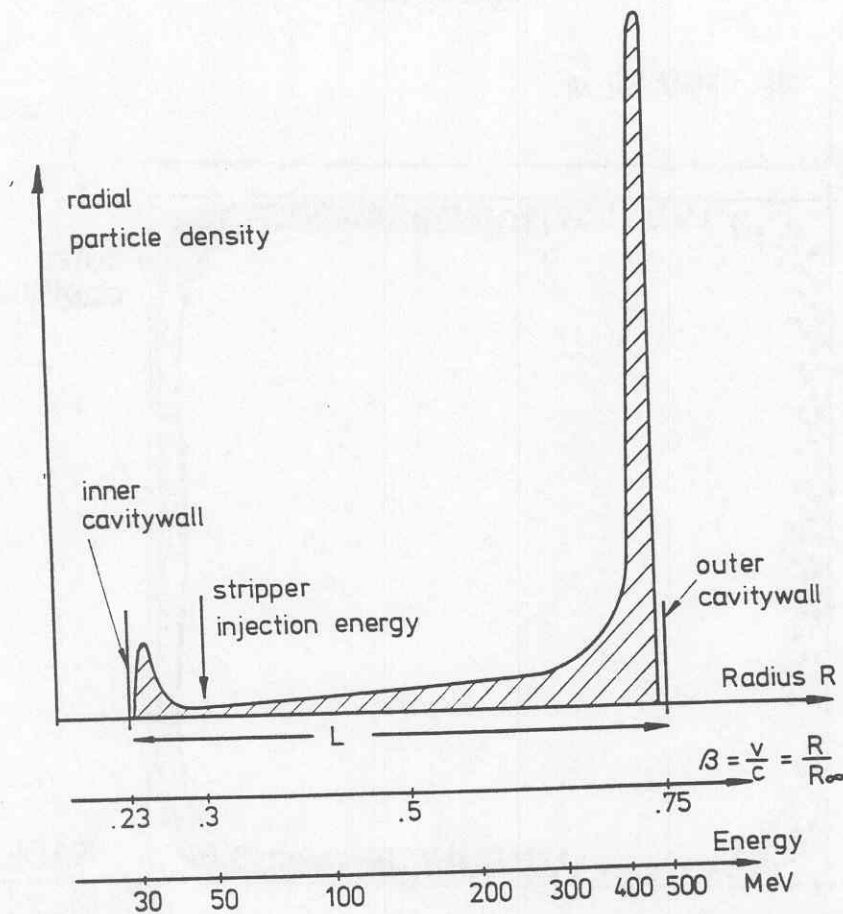


FIGURE 10 Storage ring with flat-top cavities ($\mathcal{E}_3 = 0.3$). Radial particle density for particles in hatched rings of Figure 8. The phase width of the injected beam is $2 \times 8^\circ$ whereas at the extreme energies the beam is practically dc. About 50 per cent of the stored beam is contained in a radial interval of $\Delta R = 0.04 L$ between 420 and 470 MeV.

Two main cavities with 500 kV and two flat-top cavities (150 MHz) with 150 kV peak voltage give about 5 mm turn separation at the injection energy of 45 MeV. This should be enough for the protons to avoid the stripper after one revolution. For the particle trajectories in Figure 9 the cycle period is then about 5000 revolutions or 0.7 msec. A continuously injected H^- beam of 100 μA average current would give in one storing cycle 500 mA of circulating beam, half of which would be inside a radial width of 14 cm between 420 and 470 MeV. But there is no need to stop injecting after one cycle. Let us assume that we use a carbon stripper of 100 $\mu g/cm^2$. The rms-Coulomb-scattering angle per traversal at 45 MeV is then 0.2 mrad. After 200 storing cycles or 140 msec the average scattering angle produced by the 400 stripper traversals

amounts to 4 mrad, which should be tolerable. This means that from this point of view 100 A of stored beam are theoretically possible. Since ring cyclotrons have in general a strong vertical focusing (with v_z around 1) the transversal space-charge limit is also in the 100 A region.

3.3. Problems

The great problem of this storage ring concept seems to be the *extraction*. Neutron physicists would be extremely interested if this large stored proton current could be extracted in a few microseconds. The stored current fills the circumference of the machine almost uniformly. Therefore even fast kicker magnets will produce beam spills, since the very large aperture of these magnets prevent very short risetimes. Another method could be a

slow resonance extraction scheme. One could conceive even a vertical extraction, taking advantage of the free sectors in a ring cyclotron. At the anticipated high beam current one runs into activation problems. One may fill the storage ring therefore only once every few seconds to lower the activation level.

Since the particles coast a long time at maximum energy, the isochronism of the cyclotron has to be very good. The magnetic field has to be trimmed to an accuracy of typically 10^{-4} to 10^{-5} . This looks feasible for a fixed excitation of the magnets. Beam loading of the cavities should not be a big problem, since only the newly injected particles have to be accelerated to the average energy of the stored particles.

4. CONCLUSION

The phase compression-phase expansion effect has to be taken into account in cyclotrons with a radially varying energy gain per turn. A closer look at this effect reveals that it could be utilized in storing several amperes of protons using radial $\lambda/2$ resonators. A bunched H^- beam at injection energy is transformed into an almost dc beam at maximum energy. Since the author is familiar with the SIN 590 MeV isochronous ring cyclotron, some numerical calculations were done for a storage ring of similar dimensions. No obstacle can be seen yet why this storing concept could not work at higher energies too, using, e.g. the 800 MeV H^- beam of LAMPF for injection. At TRIUMF where the H^- ions are normally stripped to protons for extraction one

could possibly use the $\nu_r = 3/2$ resonance to extract the H^- ions at about 400 MeV.⁸ The protons could then be further accelerated in a ring cyclotron and stored at around 1500 MeV. More detailed calculations are necessary to determine if the problem of extraction from a storage ring can be solved.

The phase expansion effect can also be used to stretch the duty cycle of a cyclotron by lowering the dee voltage at extraction radius or by inserting C-electrodes at the maximum energy.

ACKNOWLEDGEMENTS

This report was written during a stay at the TRIUMF laboratory in Vancouver, Canada, and the author would like to thank the University of British Columbia for their hospitality. Special thanks go to C. Kost for help with the computer calculations, and to G. Dutto, K. Erdman, and G. H. Mackenzie for stimulating discussions.

REFERENCES

1. R. W. Mueller and R. W. Mahrt, *Nucl. Inst. Meth.*, **86**, 241 (1970).
2. A. A. Garren, *Nucl. Inst. Meth.*, **18**, 19, 309 (1962).
3. W. Joho, Tolerances for the SIN Ring-cyclotron, SIN Report TM-11-4 (1968).
4. M. E. Rickey, M. B. Sampson and B. M. Bardin, 'The Indiana University 200 MeV Cyclotron Project'. *Fifth International Cyclotron Conference, Oxford 1969* (Butterworth, London 1971), p. 24.
5. J. R. Richardson, 'The Present Status of TRIUMF', *Cyclotrons 1972, AIP Conference Proceedings*, Vol. 9 (1972), p. 126.
6. P. Lanz, 'Results of Measurements on a 50-MHz Cavity for the SIN Cyclotron', *Cyclotrons 1972, AIP Conference Proceedings*, Vol. 9 (1972), p. 467.
7. H. Braun, 'Die Injektion eines 72 MeV Protonstrahls in das SIN-zyklotron und seine Beschleunigung', Thesis, SIN Report TM-11-9 (1970).
8. G. H. Mackenzie, TRIUMF, private communication.

Received 5 September 1973

THE THEORY OF ACCELERATED PARTICLES IN CYCLOTRONS

W.M. SCHULTE* and H.L. HAGEDOORN

Eindhoven University of Technology, Eindhoven, The Netherlands

Received 18 September 1979

A theory has been developed, which describes the acceleration process and its influence on the beam quality in cyclotrons. In the derivation use is made of the Hamiltonian formalism. The theory is generally applicable in the study of the influence of the energy and the phase on the radial phase plane and vice versa. It turns out that in cyclotrons with a one-Dee acceleration structure an instable radial phase plane may occur for negative central position phases. In cyclotrons with a two-Dee acceleration structure these effects are even much more important and may lead to serious distortions of the beam and large centering problems. This holds especially at the first turns in the cyclotron, and in the case of large harmonic numbers for the acceleration frequency. Numerical calculations illustrate this for several existing cyclotrons. Experimental evidence exists.

1. Introduction

The accelerating structure in cyclotrons, commonly denoted as the Dee-system, has as its main task to apply an electric field such that particles can be accelerated up to a desired energy. The amount of energy gain depends on the time of gap crossing, which is mostly expressed with respect to the time of the maximum voltage over the gap and is called the HF phase. Generally the total horizontal motion (motion in the medium plane of the cyclotron) is considered to exist as the sum of two independent motions: one describing the energy and HF phase, and the other describing the radial position with respect to a central orbit, represented in the radial phase plane.

However, close examination reveals that the gap crossing time is not independent of the position in radial phase plane. Generally there exists an interaction between the accelerating mechanism and the motion in this phase plane. This may even be responsible for instable orbits.

In this paper we will present a theory of accelerated particles, which gives a description of the most important influences of a one-Dee system and a two-Dee system on the radial and longitudinal (energy and HF phase) phase planes. To describe accelerated particles we first use cartesian coordinates with time as an independent variable. We note that

the description of the magnetic field is rather complex in this system, whereas the representation in cylindrical coordinates with the azimuth as an independent variable is relatively simple. However, the cartesian coordinates turn out to be convenient for the introduction of the acceleration.

First a short description of non-accelerated particles in a classical cyclotron is examined in order to explain the way in which the particle motion will be represented in this paper. Then the one-Dee system and the two-Dee system are taken into account, resulting in an analysis of the coupling between radial and longitudinal motion.

In the derivation we restrict ourselves to non-azimuthally varying fields. In the final results however we include the typical features of these fields. This approach has been justified by many numerical examples. In a separate paper we will indicate how to incorporate azimuthally varying fields. (e.g., main symmetry and perturbing fields as first and second harmonics), yielding as a result the gap crossing resonance phenomenon.

Further we also describe in that paper the synchrotron oscillations in a synchrocyclotron derived from our general theory (see ref. [4]).

2. Description of non-accelerated particles in cartesian coordinates

Generally the motion of particles with respect to the SEO (static equilibrium orbit) is represented in

* Supported by the Hahn-Meitner-Institut in W. Berlin, FRG.

$$\tilde{F} = \frac{q}{\omega_0} \frac{F_0}{B_0}, \quad \omega_0 = \frac{qB_0}{m}, \quad \omega = \omega_0(1 + \delta).$$

The frequency of the electric field is not taken exactly equal to the cyclotron frequency of the particle in order to bring out its influence. The quadrupole field is treated as a perturbation thus $y_m > y, x$. We transform to centre and circle coordinates in a homogeneous field (see (5) in ref. [1]).

$$\begin{aligned} H = & \frac{1}{2} \tilde{P}_x^2 + \frac{1}{2} \tilde{x}^2 + (\tilde{y} + \tilde{P}_x) \tilde{F} \cos(1 + \delta) t \\ & + \frac{1}{2} (\tilde{y}^2 - \tilde{P}_y^2) + (\tilde{P}_x^2 - \tilde{x}^2) \\ & + 2(\tilde{y} \tilde{P}_x - \tilde{P}_y \tilde{x}) (\tilde{F}/y_m) \cos(1 + \delta) t. \end{aligned} \quad (23)$$

For $y_m = \infty$ an exact solution can easily be found:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{x0} = & -\frac{2\tilde{F}}{(2 + \delta) 2\delta} [\cos t - \cos(1 + \delta) t], \\ \tilde{x}_0 = & -\frac{2\tilde{F}}{(2 + \delta) 2\delta} \left(\sin t - \frac{\sin(1 + \delta) t}{1 + \delta} \right), \\ \tilde{y}_0 = & 0, \\ \tilde{P}_{y0} = & -\frac{\tilde{F}}{1 + \delta} [\sin(1 + \delta) t]. \end{aligned} \quad (24)$$

In the limit $\delta \rightarrow 0$, the radius of the circle orbit increases linearly in time: the cyclotron resonance. The mass resolution of the omegatron can be determined by considering different values of δ which corresponds to considering particles with different masses.

Now we include the quadrupole component. We assume that the \tilde{x} and \tilde{P}_x motion is hardly affected. The quantity $1/y_m$ is considered to be of first order. The most important contribution to the centre motion comes from

$$\tilde{y} P_{x0} \frac{\tilde{F}}{y_m} \cos(1 + \delta) t - \tilde{P}_y x_0 \frac{\tilde{F}}{y_m} \cos(1 + \delta) t. \quad (25)$$

Taking only resonant terms into account the extra centre motion becomes

$$\begin{aligned} \delta P_{y0} = & \frac{\tilde{F}^2}{(2 + \delta) 2\delta} \frac{1}{y_m} \left(\frac{\sin \delta t}{\delta} - t \right), \\ \delta y_0 = & \frac{\tilde{F}^2}{(2 + \delta) 2\delta} \frac{1}{y_m} \left(\frac{\cos \delta t}{\delta} - \frac{1}{\delta} \right). \end{aligned} \quad (26)$$

For very small δ this becomes

$$\begin{aligned} \delta P_{y0} = & -\frac{\tilde{F}^2}{24} \frac{1}{y_m} \delta t^3, \\ \delta y_0 = & -\frac{\tilde{F}^2}{8} \frac{1}{y_m} t^2. \end{aligned} \quad (27)$$

From this it follows that the δP_{y0} position of the orbit centre depends linearly on δ . This effect gives the possibility of increasing the mass separation by placing several targets at different places in the P_y direction. This was shown by Bijma [10].

5. Conclusions

A description of accelerated particles in cyclotrons with azimuthally varying fields, synchrocyclotrons and omegatrons is a distinct possibility. The choice of centre and circle variables enhances the insight into the particle motion. To investigate the coupling between synchrotron oscillations and betatrons oscillations, the Hamiltonian function presented has to be explored further.

References

- [1] W.M. Schulte and H.L. Hagedoorn, this issue, preceding article.
- [2] Van Nieuwland, Eindhoven University of Technology, thesis (1972).
- [3] H.L. Hagedoorn and N.F. Verster, Proc. 2nd Int. Cycl. Conf. Nucl. Instr. and Meth. 18, 19 (1962) 201.
- [4] M.M. Gordon, Nucl. Instr. and Meth. 18, 19 (1962) 268.
- [5] W.M. Schulte, Eindhoven University of Technology, thesis (1978).
- [6] P. Kramer, CERN-report 63-19 (1963) p. 214.
- [7] C. Corsten, Eindhoven University of Technology, Internal report NK 253 (1977).
- [8] A.A. Kolomenski and A.N. Lebedev, Theory of cyclic accelerators (North-Holland, Amsterdam, 1966).
- [9] K.R. Symon and A.M. Sessler, CERN Symp. on High energy accelerators and pion physics (1956).
- [10] J. Bijma, University of Groningen, thesis 1973.
- [11] W.M. Schulte, H.L. Hagedoorn, Proc. 8th Int. Conf. on Cyclotrons, Bloomington, 1978.

RECENT DEVELOPMENTS ON BEAM DYNAMICS IN CYCLOTRONS

P. Lapostolle

Grand Accélérateur National d'Ions Lourds, B.P. 5027, 14021 CAEN Cedex, France.
Tel. (31)94.81.11 - Telex 170 533 F.

Abstract.— Starting with the general methods of orbit computations, some attention will be devoted to the properties of orbits over one turn. Next will be considered the problems related to field perturbations, focusing perturbations and perturbations of the medium plane. Eventually invariant or integral properties of the orbits over the whole acceleration process will be examined including various proposals which will be tested on GANIL. High intensity problems treated later at the Conference⁽¹⁾ are not considered here.

1. Introduction.— Cyclotrons are very old machines (the proposal by E.O. Lawrence was made in 1930) and even their most recent form, the so called isochronous cyclotrons, if not currently realized immediately after the principle was set forth by Thomas in 1938 is now generalized since 20 years (about the time when these conferences started).

Almost everything about cyclotrons was known from the beginning and certainly nothing really new and fundamental can now be discovered, but the need for better and better beam qualities, the type of accuracy required by the new superconducting versions and other similar circumstances have however led to more detailed studies, either for instance to improve extraction conditions⁽²⁾, to understand limitations due to non linearities⁽³⁾ and anyway to explore the possibilities of producing better beams.

The purpose of this paper is to briefly review some of these recent efforts, referring mostly to those presented in one form or another at this Conference and on studies developed at GANIL.

2. Orbit computations.— From the development of computers and of more elaborate field mapping devices, have arisen faster and more accurate beam orbit computations. Even if for most of them, nothing basic is new it is however interesting to review some of the lines followed. Worth is also mentioning the possibility offered by present big computers to make beam studies through multiparticle simulation (several tens of macroparticles with a proper statistical distribution).

2.1 Field computation methods.

Efforts have been made for having the possibility to make quick tests on the computer of the effect of changing the geometry of a system, for instance moving elements in the injection area in order to design a new system⁽⁴⁾. Optimization procedures have been developed⁽⁵⁾. Special attention has been put, in particular for the injection region into a superconducting machine, on axial focusing properties⁽⁶⁾.

2.2 Motion in the magnetic field.

The motion in a magnetic field does not present any special problem. Matrix formalism can easily be

used. More general formulae for hard edge approximation in an isochronous machine with variable spiral angles have been derived for the Calcutta project⁽⁷⁾ as well as at Osaka⁽⁸⁾. A slightly new proposal is made at Oak Ridge⁽⁹⁾ for introducing non linear terms through the eikonal function over giant steps of integration (for instance one focusing period or a fraction of period). Such a function can be stored for different radii and used for a fast and accurate computation. This computation to which acceleration is now being added could give a very convenient way to study numerically invariant properties and stability problems.

2.3 Motion in an rf field.

Acceleration process through an rf gap is still subject to evolution on the way it is treated in the computations. If single step uniform field type expressions are still used in an optimization procedure at Julich for fast approximations⁽⁵⁾, a more precise situation is studied with the help of a 3d field relaxation programme. Such 3d codes remain difficult and heavy to handle even with present computers⁽¹⁰⁾; electrolytic tank measurements are still in use⁽⁶⁾ with direct entry to computer.

2.4 rf accelerating gap treatment at GANIL.

An intermediate solution used at GANIL is to express the rf field of an accelerating gap in the form of a Fourier integral with the help of a set of standard EM waves⁽¹¹⁾. The integration of motion of particles inside such a field is then easily done with perturbation methods. Fourier transforms lead to single expressions giving as well classical terms (acceleration, transverse kick) as additional correcting terms if necessary. Since we shall use it later in this report, let us come into more details.

It has already been mentioned⁽¹²⁾ that instead of a single gap, this method can be extended to a complete delta with two gaps situated in a magnetic field free section: for a symmetrical gap of angle 2δ (see fig. 1) with voltage independent of radial position x and gap geometry along the orbit coordinate s also independent of x , the electric field along the s direction can be expressed by the Fourier integral:

$$E_s(s, x, z, t) = \frac{V \cos(\omega t + \phi)}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(k_z z) \cdot T(k) \cdot \sin(kx \operatorname{tg} \delta) \cdot \sin(ks) \cdot dk \quad (1)$$

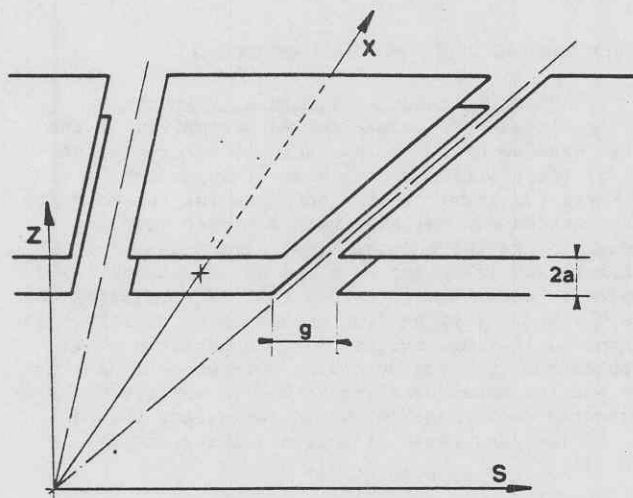


Fig. 1 : Delta shape rf cavity geometry corresponding to the analysis derived in the text. Gap width g , aperture $2a$.

where z is the axial coordinate,

$$k_z^2 = k^2 \cdot (1 + \tan^2 \delta) - \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{k^2}{\cos^2 \delta} - \frac{\omega^2}{c^2} \quad (2)$$

and $T(k)$ is the transit time factor of the gap geometry of the delta, for instance

$$T = \sin(kg/2) / ((kg/2) \cdot \text{ch}(k_z a)) \quad \text{very close to one for}$$

most usual gap values g and apertures $2a$. The expression under the integral sign has the typical form of a component of electromagnetic wave in rectangular coordinates and it is easy to obtain all the other components.

By first order and if necessary higher order⁽¹³⁾ perturbation method⁽¹⁴⁾ it is then possible to express by one term or a few terms the longitudinal and transverse kicks and displacements received by a particle crossing the full delta. Similarly, without much extra complexity it is possible to include in the expression of the field a radial variation of the voltage (along the gap) : provided such a variation is expressed in the form of a few terms of a Fourier expansion, (1) remains of the type of a sum of EM waves (with however different k_z for each of them).

All expressions describing the effect of the delta cavity on a particle of velocity v can then be expressed with respect to the position and rf phase of the particle when crossing the mid plane of the delta. For instance, the particle gets an extra energy ΔW , is displaced in phase by $\Delta \phi$ and receives a radial kick which can be expressed in the following way : putting

$$|\Delta W|(x, z, k) = V(x) \cdot \text{ch}(k_z z) \cdot T(k) \cdot \sin(kx \tan \delta) \quad (3)$$

one has

$$\Delta W = \frac{q}{u} |\Delta W|(x, z, k = \omega/v) \sin \phi \quad (4)$$

$$\Delta \phi = -\frac{q}{u} \frac{1}{2W} \frac{\omega}{v} \frac{\partial}{\partial k} \{ |\Delta W|(x, z, k = \omega/v) \} \cos \phi \quad (5)$$

$$\frac{\Delta(m v_x)}{mv} = \frac{q}{u} \frac{1}{2W} \frac{v}{\omega} \frac{\partial}{\partial x} \{ |\Delta W|(x, z, k = \omega/v) \} \cos \phi \quad (6)$$

q is the charge of the particle, u its mass in atomic mass units and energies W are expressed in electron volts per atomic mass unit.

On such expressions one easily finds well known relations like (irrotational property)

$$\frac{\partial(m v_s)}{\partial x} = \frac{\partial(m v_x)}{\partial s} \quad (7)$$

As was shown previously⁽¹²⁾ the effect of the term $V(x)$ on the phase compression or dilatation of a bunch can also be derived easily.

Other delta cavities, with unsymmetrical voltages for instance, could also be considered but \cos terms should be added to the \sin of expression (1). More general expressions with more terms could however be derived. Non straight gaps, except for a very limited number of cases cannot however be treated with this analysis. Nevertheless local properties can still be studied. Relation (7) is very general in a first order perturbation method as can be proved from basic expression of EM field with vector potential.

One of the interest of the previous approach is to provide a link between hamiltonian mechanics properties of the EM field, and extend to rf fields the well known properties of static fields, showing how they are connected with Maxwell's equations. If the previous analysis was derived only for the case of a cavity situated in a magnetic field free region, an extension of it to include the presence of a magnetic field, for instance uniform, might be an interesting tool for the analysis of compact cyclotrons.

3. Properties of the orbits over one turn.- For gaps inside the magnetic field other properties can be derived with the help of various methods and new theories have even been developed⁽¹⁵⁾.

3.1 Effect of spiral gaps.

An important property recently discussed is that a spiral accelerating gap does not perturb the isochronism of trajectories (nor do radial gaps) : the radial kick due to the angle of the spiral exactly cancels out the change in length of the orbit due to the change in azimuth of two successive crossings.

Such a property initially discovered by Mac Millan^(a) was known in several places (among others : T.A. Welton at Oak Ridge, P. Lapostolle at CERN, H. Willax at SIN,...). A simple derivation of it is given at this Conference by S. Adam⁽¹⁶⁾ with the help of a matrix formalism. Spiral cavities are used in superconducting sector focused cyclotrons and M.M. Gordon⁽¹⁷⁾ has recently given another proof of the same property.

In fact it may happen that spiral delta shape cavities have variable and unequal voltages along their two gaps. Similarly to the analysis described in the previous paragraph such a case may not be reduced to a simple single gap but to a more complex one. Nevertheless as long as one is concerned with local properties

(a) E. Mac Millan who unfortunately did not keep record of it had developed his analysis in response to a proposal for the use of spiral gaps in a classical cyclotron as a method for maintaining isochronism at large radii⁽¹⁷⁾.

the proofs can certainly be extended and thereafter generalized. The matrix formalism is certainly a very efficient tool to treat such complex cases.

3.2 Radial longitudinal coupling. Rotation in the 3d or 4d space.

Another property of the orbits is the coupling⁽¹⁸⁾ between radial and azimuthal motion. Such a coupling is well known and has been already emphasized previously. As shown in a uniform field, the relative motion of two particles in the space dr, dr' (radial), ds (azimuthal length) is a skew ellipse and one has everywhere the relation

$$ds - ds_0 = r dr' \quad (8)$$

r being the radius of the orbit.

In a periodic focusing machine, the smooth approximation can be used. If ν_r is the radial betatron frequency, the ratio of the amplitudes of dr and dr' in a betatron oscillation is $\pi = r/\nu_r$; the ratio of amplitudes of ds to dr is $1/\nu_r$ and

$$ds - ds_0 = \frac{r}{\nu_r^2} dr' = (r_{ch}) dr' \quad (9)$$

introducing the chromatic radius (r_{ch}).

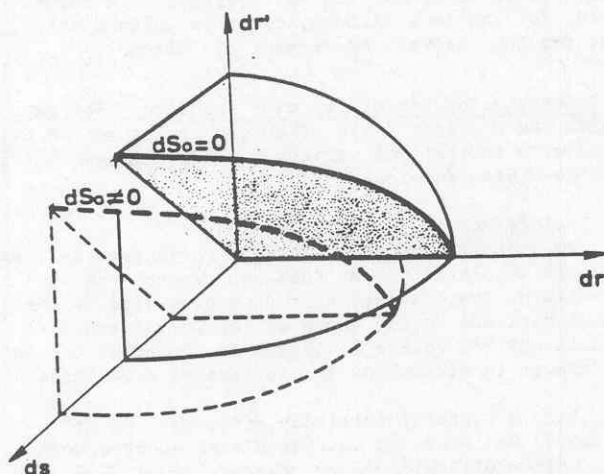


Fig. 2 : Motion of a particle in the smooth approximation of a cyclotron magnetic field. Without acceleration, the fourth coordinate, conjugate to ds is constant. The motion remains in a plane $ds = (r_{ch})dr' + ds_0$. When ν_r increases the amplitude of ds with respect to dr decreases as $1/\nu_r$.

The motion in the space $drdr'$ is still an ellipse (fig. 2) but with different axes.

The smooth approximation is not always very accurate. The true situation, of a sector machine for instance, is more complex; it is easy however, with the matrix formalism to compute, at different azimuths, the ratio of amplitudes, i.e., the β function and the $(r_{ch}) = ds/dr'$ function. This last one is directly related to the chromatic g function through symplectic relations. In the hard edge approximation the chromatic radius does not differ either in mid valleys or mid sectors from the radius r (distance to the center)

by more than 10 % (in the case of GANIL).

3.3 Matching conditions into a cyclotron.

As already emphasized the 4d properties of the orbits have to be taken into account for the adjustment of the position of the beam at injection in r, r' and phase (ds term), energy and also for its matching which must be accomplished with a proper coupling between the radial and azimuthal directions in order to insure the injection into the 4d acceptance⁽¹⁹⁾. Simplectic conditions are such that this matching is possible when starting from an uncoupled emittance in an achromatic line. Furthermore, in particle orbit computations it turns out to be worthwhile to introduce not the usual coordinates but to replace ds by a "corrected coordinate"^(a) which represents the position of the skew plane of motion; the quantity

$$ds - (r_{ch}) dr'$$

is invariant under betatron oscillation and it can be better used to define a "corrected" bunch length and corresponding emittance; one may notice that in phase one is lead to a quantity of the type

$$\phi - k dr'$$

where for the case of radial sectors k is almost independent of radius or energy (like $1/\nu_r^2$).

Similarly the radial coordinate should be modified and "corrected" for the actual momentum of the particle

$$dr - (r_{ch}) \frac{dp}{p}$$

and accordingly for radial emittance.

The previous coupling properties emphasized for the case of cyclotrons similarly exists for all circular machines. From equation (9) however its importance mainly appears for low ν_r machines. Furthermore the coupling of radial betatron with synchrotron rf motion requires rather high harmonic numbers to be appreciable. Such cases may however exist.

4. Field perturbations.

4.1 Centering methods.

The effect of field perturbations for displacing the orbits and methods to achieve a good centering have already given rise to much work in the past around many cyclotrons.

One must just mention a recent work in IPCR⁽¹⁹⁾ for taking into account the distorting effect of rf cavities already described by Adam in 1978 at the European Cyclotron Progress Meeting in Berlin and referred to as GABA effect or lozenge effect⁽¹²⁾.

The most important facts to report may be efforts towards centering and matching into a cyclotron an axially injected beam. Some of this work has already been referred to for orbit computations in sec.2.1. Much work is being devoted to this problem in particular in Kalsruhe, Louvain-la-Neuve, Julich⁽⁵⁻²²⁾ and

(a) In a new analysis of particle orbits in a cyclotron⁽²⁰⁾ M.M. Gordon has derived similar considerations.

Such a line had in fact also been used by W.M. Schulte⁽²¹⁾ but the hamiltonian formalism he is using partly obscures the physical facts.

Groningen⁽²³⁾ and another report of this Conference is devoted to the subject⁽²⁴⁾. Many ingenious schemes are being studied. One of the difficulties is that over the previously mentioned (dr, d ϕ) coupling is now added a (dz, d ϕ) coupling.

4.2. Centering studies at GANIL.

For centering at injection into a sector focused machine the previously reported methods developed at Vicksi⁽²⁵⁾, SIN⁽²⁶⁾, Triumf⁽²⁷⁾ are being refined at GANIL to take into account special circumstances encountered there.

The method uses three probes in three of the four sectors, measuring the position of the beam over two successive turns :

$$r(\theta) = r_{\text{ref}}(0) + a \cdot \sin(\theta + \phi) + b \cdot \sin(\nu_r \theta + \psi) + \frac{\sigma(\theta)}{2\pi} \theta \quad (10)$$

where over the reference initial orbit $r_{\text{ref}}(0)$ are superimposed the orbit perturbation $a \cdot \sin(\theta + \phi)$ due to field errors to be corrected, unknown betatron oscillation $b \cdot \sin(\nu_r \theta + \psi)$ and the spiralling term in σ .

This last term, instead of being proportional to θ , may in GANIL depart from linearity and even not be well known for two reasons :

- due to the large turn to turn separation the orbits are strongly perturbed by the rf acceleration (lozenge effect) the amplitude of the perturbation (of second harmonic) being proportional to the energy gain per turn ;
- if bunch length compression is used (see sec.7.1) the energy gain per turn will change very quickly from turn to turn according to a law which is theoretically known but depends critically in practice on the exact initial phase and centering adjustments.

The method assumes well known the value of ν_r since its vicinity to 1 controls the amplitude of first order oscillations. Field errors (to be corrected, but unknown) may affect ν_r , and compression also changes its value.

All these effects limit the accuracy of the centering method. What was aimed at in GANIL was to test the possibility of including a determination of the σ law in order to obtain a better reference trajectory including correcting terms on σ and accordingly to make an estimate of the limits of accuracy to expect.

Computer simulations were made on an accelerated beam orbiting in a magnetic field measured in the GANIL SSC's isochronized with trim coils, with the injection elements and their correcting shims, with or without the field perturbation for bunch compression and with or without an additional first harmonic field perturbation (of the type to be used for centering the orbits).

No definite conclusion can be drawn yet and only after true beam experiments real processes will be derived. The following remarks can however be done :

- when checking the phase of the particles in order to adjust isochronism or another phase law (for compression) and to estimate acceleration (and the law of σ versus radius) one is led to forget about the coupling between radial and azimuthal motions ; this is less and less correct when the rf harmonic goes up ;
- one forgets about field perturbation harmonics other than 1 ;

- one assumes not too fast an acceleration to justify an adiabaticity hypothesis ($\sigma = 60$ mm is very large and leads to bad results ; 30 mm is a limit for a reasonable accuracy) ;

- one assumes a slow radial variation of perturbations (which is not the case for the injection elements and their correcting shims) because, otherwise, the amplitudes a and b of orbit perturbation and betatron oscillations quickly change from turn to turn and ν_r is also modified ;

- one makes use of differences between orbit positions ; the accuracy of the probe measurements limits the accuracy to which centering can be adjusted.

It is estimated that the method is efficient for correcting orbit perturbations or misalignments for oscillations between 5 and 30 millimetres. Experiments with the beam are however needed to confirm these figures.

5. Gradient perturbations. Radial motion.-

5.1. Magnetic field perturbations.

Field gradients affect focusing properties of the magnets and hence matching conditions.

The necessity of keeping isochronism or a smooth phase law insures some average conservation of gradients. It does not exclude however the possibility of harmonic gradient perturbations. Amongst them second harmonics are the most severe in cyclotrons where $\nu_r = 1$.

The effect of a gradient perturbation is to open a stop-band of instability around $\nu_r = 1$ ⁽²⁸⁾; close to the edge of this instability region however, where the orbits are still stable, focusing properties can be appreciably changed and matching conditions may be difficult to satisfy. In the case of GANIL where $\nu_r = 1.07$ at injection the opening of a stop-band of ≈ 0.035 (half way of the initial margin) quite appreciably affects matching conditions.

Gradient perturbations may be corrected by properly excited trim coils. In the case of a four sector machine however, and excitation of the type +++- of the sectors can produce a well behaved second harmonic field and gradient correction, but its phase is rigidly fixed. If the perturbation is due (as in the case of GANIL) to an injection magnet which mainly affects the field in one valley (by producing a fast drop near the injection radius) the trim coils are totally inefficient for correction.

Such a valley perturbation could be corrected, for orbit perturbation only (first order), by an equal perturbation diametrically opposite. As far as focusing and stop-band are concerned, however, the effect would be doubled.

The procedure used at GANIL has been to try to correct the perturbation by shims installed as close as possible to the magnet which produces it. Field measurements are completed with a computation of the remaining second order focusing force amplitude and phase and a computation of the resulting stop-band⁽²⁸⁾. The rule of keeping that one well below half the original margin and preferably not more than one third or one fourth has been adopted (see sec.5.2).

An effort on a similar subject is being developed on the project SUSE at Garching. There the injection line being in one scheme above the medium plane the

field correcting problem requires also the consideration of the axial direction with symmetry restoring elements⁽²⁹⁾.

5.2. rf cavity perturbations.

One strong source of second order perturbation can be rf cavities. The importance of this effect was already reported before and its analysis given at several instances⁽³⁰⁻³¹⁻³⁵⁾.

The exact computation of one orbit including the acceleration through a two delta system in a four sector machine can be obtained with the help of matrix formalism. An approximate expression was given⁽³¹⁾ relating the dr and ds coordinate after one turn to the initial values taken in an rf free valley; it can be expressed in the form (to first order in A):

$$\begin{cases} dr_1 = (\cos 2\pi\nu_r + 2A) dr + \frac{\beta}{(r_{ch})} \sin 2\pi\nu_r ds \\ ds_1 = -\frac{(r_{ch})}{\beta} \sin 2\pi\nu_r dr + (\cos 2\pi\nu_r - 2A) ds \end{cases} \quad (11)$$

$$\text{with } A = \frac{\Delta W}{2W} \cdot \phi \cdot \cotg \phi \quad (12)$$

$$\text{and } \phi = h \cdot \frac{r_{vall}}{R} \cdot \tg \delta \quad (13)$$

where β is the usual β function, (r_{ch}) is the chromatic radius previously introduced⁽⁹⁾, h the harmonic frequency factor, r_{vall} is the mid valley radius (in the mid delta plane), R is the average radius of the orbit and δ half the angle of the delta cavity; ϕ is then the phase drift between the mid plane of a delta and each gap; ΔW is the energy gain over one delta^(a).

The stroboscopic view at a fixed azimuth (mid free valley) of oscillations of the previous type looks like smooth oscillations governed by the set of differential equations:

$$\begin{cases} \frac{d(dr)}{d\theta} = kdr + \frac{\beta}{(r_{ch})} ds \\ \frac{d(ds)}{d\theta} = -\frac{(r_{ch})}{\beta} dr - kds \end{cases} \quad (14)$$

$$\text{with } k = A / \pi(\nu_r - 1) \quad (15)$$

It then appears that the rf cavities can introduce an instability and open a stop-band exactly like field gradient errors do and we shall compute later the magnetic field error equivalent to the rf cavities.

Before that however let us look at some of the properties of equ. (14) and (15) which offer a good insight into the orbit situation near a stop-band.

One easily finds that the presence of the k term reduces the beat frequency by the factor $\sqrt{1-k^2}$; the motion then becomes unstable for $|k| = 1$, i.e.

$$A/\pi = \nu_r - 1 \quad (16)$$

Furthermore before that instability is reached the motion in the dr, ds plane instead of being a circle (with the proper scaling) becomes a skew ellipse of

(a) Taking the gain per turn, the factor 2 should be dropped in front of A in equ. (11).

axis ratio $\sqrt{(1+|k|)/(1-|k|)}$. If the 4d matching is not properly corrected, envelope oscillations will appear with a max/min amplitude equal to $\sqrt{(1+|k|)/(1-|k|)}$. This exemplifies the necessity of remaining far enough from the edge of the stop-band and justifies the rule given above of not admitting the opening of a stop-band filling more than half the margin $\nu_r - 1$ ($|k| = 1/2$: $\sqrt{(1+|k|)/(1-|k|)} = 1.732$) and preferably only one third (...1.414) or one fourth (...1.291).

For high harmonic frequency factors, ϕ can be very large (several radians) and according to its exact value A may no longer be negligible (being either > 0 or < 0).

It then becomes very interesting to find out whether there exists a magnetic field gradient perturbation having an effect of the same nature as that of rf cavities and such that applied with the opposite sign it would cancel their effect⁽³²⁾.

Let us for that consider the perturbation of thin lenses of vergence $\pm \Delta$ applied in the middle of each of the four sectors (see fig.3). Computing the matrix dr, dr' over one turn starting from a mid valley point, one finds for the diagonal terms, limiting the expansion to third order in Δ , $(\nu_r - 1)$:

$$\begin{aligned} \cos 2\pi(\nu_r - 1) &\pm 2\Delta \cdot \cos \pi(\nu_r - 1) \cdot \cos^2(\pi(\nu_r - 1)/2) \\ &+ \beta^2 \Delta^2 (2 \mp \pi(\nu_r - 1)/2) \mp \beta^3 \Delta^3 \end{aligned}$$

To first order, there is the equivalence

$$\beta\Delta \equiv A$$

and the check of the trace of the matrix shows that the stop-band opening is

$$\beta\Delta/\pi \equiv A/\pi$$

in agreement with (16); this justifies the above developments. The rf cavity effect can be cancelled by a perturbation in the sectors.

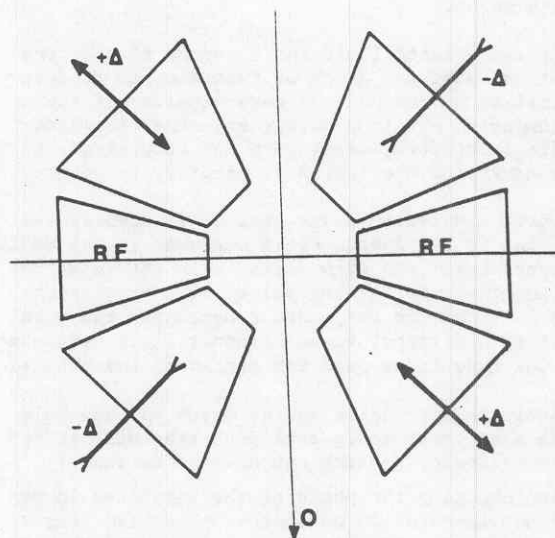


Fig. 3: Thin lens compensation scheme of the gradient perturbation produced by rf cavities. Equations given correspond to one turn starting and finishing at azimuth 0.

In order to refine the computation of the field produced by trim coils which would compensate the rf cavity effect, one should use Courant and Snyder theory⁽²⁸⁾.

Considering that a flat sector has already a focusing effect, the total focusing strength in the equation

$$x + g(s) x = 0 \quad (17)$$

is given by

$$g(s) = \frac{B^2 + (\rho B) \partial B / \partial n}{B^2} \quad (18)$$

where B is the local magnetic field (ρB) is the mv/q of the particle, $\partial B / \partial n$ is the gradient normal to the trajectory and \bar{B} is the average field over one turn.

Assuming the bare machine is such that $\partial B / \partial n = 0$ and that one is adding with trim coils a correction ΔB , one has

$$\Delta g(s) = \frac{2B \cdot \Delta B + (\rho B) \partial \Delta B / \partial n}{B^2} \quad (19)$$

In order to produce a second harmonic effect counteracting the rf perturbation one should have in the sectors of width 2θ taking into account the exact terms appearing in the derivation of Courant and Snyder⁽²⁸⁾

$$\frac{2B}{(\rho B)} \cdot \Delta B + \frac{\partial \Delta B}{\partial n} = A \bar{B} \frac{R/r_{\text{hill}}}{2 \theta B} \quad (20)$$

From (12) with a voltage on the gaps independent of r (20) can be written forgetting the difference between ρ and r in the first term :

$$2 \frac{\Delta B}{r} + \frac{d\Delta B}{dr} = \frac{k_1}{r^2} \quad (21)$$

$$\text{with } k_1 = A_0 \bar{B} \frac{r_0 R_0}{2 \theta B_0} \quad (22)$$

indices referring to values at injection.

The general solution of (21) is

$$\Delta B = \frac{k_1}{r} + \frac{C^t}{r^2} \quad (23)$$

By a proper choice of the C^t one can make the perturbation ΔB equal to zero near injection, extraction or at any intermediate radius.

A perturbation like (23) would in principle cancel completely the effect of rf cavities.

For GANIL however the rf cavity perturbation is serious for the operation on $h=14$; a numerical estimate of ΔB given by (23) gives very large field values. As previously explained, fortunately, it is not necessary to cancel completely gradient perturbations but only to reduce them to an acceptable level. Since the rf perturbation decreases with radius one can make correction only up to a certain radius r_1 where the stop-band width is small enough and replace equ.(21) by

$$2 \frac{\Delta B}{r} + \frac{d\Delta B}{dr} = \frac{k_1}{r^2} - \frac{k_1}{r_1^2} \quad (24)$$

of which the solution such that $\Delta B(r_1) = 0$ is :

$$\Delta B = \frac{k_1}{r} - \frac{k_1 r}{3 r_1^2} - \frac{2 k_1 r_1}{3 r^2} \quad (25)$$

A few computer simulation runs have been made with such corrections and shown a reduction of the effect of the rf perturbation on the motion in (dr, ds) plane. Further studies would still however be needed and only tests with beam will eventually give a conclusive answer on the interest of such a compensation method.

6. Axial motion perturbation. - In most of the designs one assumes a perfect symmetry of all the machine components with respect to the so-called median plane.

Any axial asymmetry can reduce axial acceptance⁽³³⁾. The effect however is particularly big when $v_z \neq 1$.

The case of crossing $v_z = 1$ resonance is met at IUCAF. A method has been studied there and found satisfactory⁽³⁴⁾; by providing slightly different currents in the top and bottom coils of the four individual sector magnets, the beam is kept near the median plane and moving the magnet yokes physically has not been necessary. (See a note at the end of the paper)

7. Integral and invariant properties. -

7.1. Bunch length compression.

The reduction of energy spread in a cyclotron if no flat topping is used requires a reduction in bunch length.

If one wants not to lose intensity by cutting the edges of the bunch, some manipulation or matching in longitudinal phase space must be achieved.

Such a manipulation can be made before injection; one may also think of doing it inside the cyclotron itself.

Muller and Mahrt⁽³⁵⁾ had indicated more than ten years ago that such a compression in phase is possible provided the energy gain per turn is strongly increased after injection. They had shown the existence of the invariant

$$\Delta W \sin \Delta \phi = C^t \quad (26)$$

where $\pm \Delta \phi$ is the bunch length and ΔW the energy gain per turn.

In order to change ΔW (see equ.(3) and (4)) one might think of having either a variable voltage V along the gap (but a fast variation is difficult to produce) or a variable transit time factor T of the gap (by a change in gap length or aperture, not very convenient either). Another possibility would be to change the delta angle but that would lead to a situation where the factor A defined by equ.(12) would be great and the rf perturbation open a wide stop-band. Anyway any device of one of these types would be fixed and offer no flexibility for optimizing compression factor: this optimum obviously depends on the exact longitudinal phase space distribution of the bunches⁽³⁶⁾.

The method proposed by P.Yvon and considered at GANIL⁽³⁶⁾ makes use of an average field perturbation ΔB producing a slip of the phase of the bunch centre just after injection. The bunches are then injected, say 60° or 70° ahead of the optimum phase and then moved in phase toward the maximum gain position.

From the invariant of motion :

$$qV \sin \phi + \int 2 \pi h (\Delta B_0(W)/B_0) dW = C^t \quad (27)$$

and considering two particles of central phase ϕ_c separated by small $\Delta \phi$, ΔW , a comparison between input and output gives :

$$\left\{ \begin{aligned} [QV \cos \phi_c \Delta c + 2\pi h (\Delta B_o/B_o) \Delta W]_{out} = \\ [QV \cos \phi_c \Delta c + 2\pi h (\Delta B_o/B_o) \Delta W]_{in} \end{aligned} \right. \quad (28)$$

Assuming for instance $\Delta B_{out} = 0$ and the two particles of the same initial energy ($\Delta W_{in} = 0$) one gets :

$$(V \cos \phi_c \Delta c)_{out} = (V \cos \phi_c \Delta c)_{in} \quad (29)$$

In order to minimize the final energy spread, the phase after compression is made slightly positive in such a way that the average phase be zero (see fig. 4).

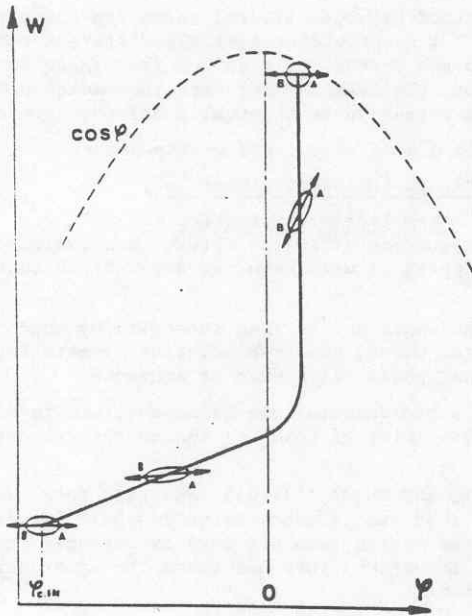


Fig. 4: Basic bunch length compression scheme. The central phases move after injection from a large negative value to a value close to the maximum of acceleration; the exact final value is such that particles A (head) and B (tail) have the same energy at output.

7.2. Longitudinal to radial coupling.

A difficulty arising in the application of the previous bunch compression method is that the turn to turn separation is reduced at injection by a factor about equal to that of the compression foreseen. Injection, especially for high energy machines where this separation is naturally small becomes impossible without special tricks. One of them is to use precessional injection. This is what is foreseen in GANIL SSC2.

A precession of about 2.5 cm amplitude insures, for the case of GANIL, very good injection conditions.

Left until extraction such an oscillation could advantageously replace for ejection the orbit separation otherwise produced by a field bump. Such a mixed device looks a priori very attractive.

Computer simulation tests however showed that while the longitudinal phase space behaved correctly the radial emittance exhibited a large increase⁽³⁶⁾. This is due to a phenomenon already analysed under different circumstances by W.M. Schulte⁽³⁷⁾. In a high energy cyclotron the v_r increases with energy, due to

relativistic isochronism corrections. In case, as in fig. 4, head particles have always an energy slightly higher than tail particles they will make more precessional oscillations.

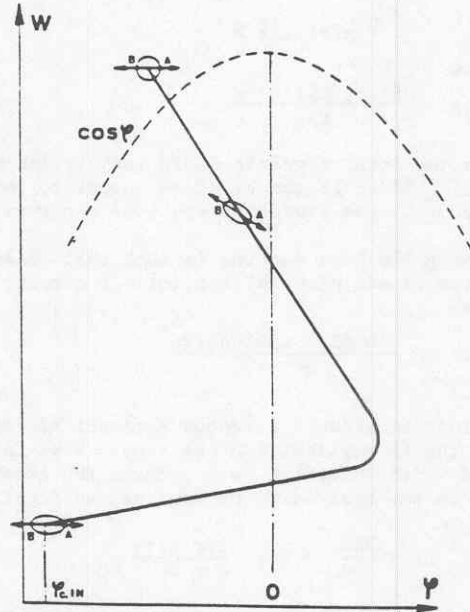


Fig. 5: Modified bunch length compression scheme for minimizing output radial emittance when precession is used. Head and tail (A and B) particles must have the same energy at output ; in addition their average relative energy during acceleration must be equal.

A study of this effect⁽³⁶⁾ led to use a phase law as shown on fig. 5, which is obtained by only a very slight increase δB_o of the magnetic field after compression (a few gauss). The behaviour, during acceleration, of a well adjusted beam is shown on fig. 6 while fig. 7 gives the output radial emittance, bunch length and energy spread as function of the injection phase for various values of the small field correction δB_o .

Injection phase and field adjustments can be based on a comparison between input and output. The accuracy required is not higher than without compression nor precessional injection⁽³⁸⁾. Electronic control through computer could be used when more experience is gained.

The progressive increase of radial emittance during acceleration still seen in fig. 6 is of the nature of the phenomenon studied by W.M. Schulte as previously mentioned. It is due to the energy difference between central particles and the average between head and tail, difference produced by the non linear form of a sinusoidal accelerating field. This slight increase, proportional to the precessional amplitude could be cancelled, as shown by Schulte by a proper reduction of v_r before extraction⁽³⁷⁾. Such a scheme has not been tested at GANIL.

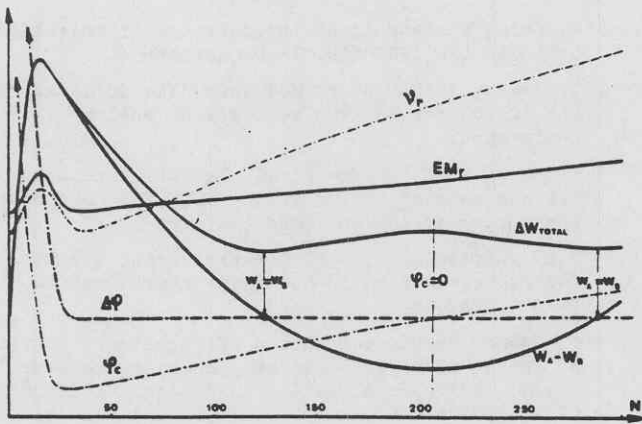


Fig. 6: Mechanism of radial emittance growth compensation. One may notice that :
 $-v_r$ increases almost linearly with the number N of turns except at the beginning of acceleration due to compression field perturbation .
 $-\phi_c$ (central phase) follows a law of the type shown on figure 5.
 $-\Delta\phi$ (bunch length, "corrected" according to sec.3.3.) is compressed fast and stays constant during the rest of acceleration.
 $-W_A - W_B$ (head to tail energy difference) comes to a large value during compression ; it then goes through zero becomes negative and comes back to zero at the end of acceleration. ΔW total bunch energy spread.
 $-\text{Radial normalized emittance (EMr), "corrected" according to 3.3., increases slowly as explained at the end of sec.7.2.}$

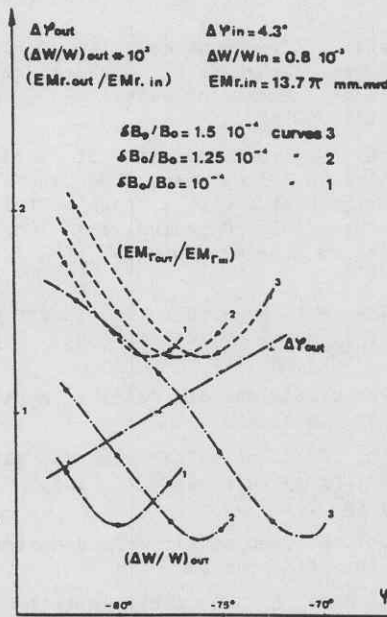


Fig. 7: Effect on radial normalized emittance and on total energy spread of a change in injection central phase ϕ_c and in compensation field δB_0 :
 $\phi_{c \text{ in}} = -77^\circ$ on curve 2 gives a good operation, corresponding to fig. 6. Tolerance of adjustments appears clearly.

7.3. Axial to longitudinal coupling.

Axial oscillations slightly affect acceleration for two reasons. One is through the change in length of the orbits and hence the progressive change in phase of acceleration when particles perform axial oscillations. Another is because transit time factor through an accelerating gap depends on axial position (mainly at low energy). These two effects are quadratic in terms of oscillation amplitude a : the relative orbit length increase is $1 + \frac{1}{2} a^2 / \lambda_z^2$ where $\lambda_z \sim 2\pi R / v_z$ is the axial betatron wavelength. The relative energy gain increase is $1 + a^2 h^2 / 4 R^2$.

The resulting effect, analyzed for the case of GANIL turns out to be very small. The change in output energy after N turns of acceleration for a particle of initial phase ϕ_{in} performing axial oscillations of assumed fixed amplitude a and frequency v_z is given approximately by⁽³⁹⁾ :

$$\delta W \approx \left\{ \frac{h(W_{ex} - W_{in})}{2 \pi v_z^2 N} + \left[W_{ex} \left(\ln \frac{W_{ex}}{W_{in}} - 1 \right) + W_{in} \right] \phi_{in} \right\} \delta \phi$$

with

$$\delta \phi = 2 \pi N h \frac{v_z^2 a^2}{4 R^2} \frac{W_{in}}{W_{ex} - W_{in}} \ln \frac{W_{ex}}{W_{in}}$$

where $\delta \phi$ is the phase slip during acceleration.

The result of a computer simulation is shown on fig. 8 for a bunch having twice the normal axial amplitude statistical distribution.

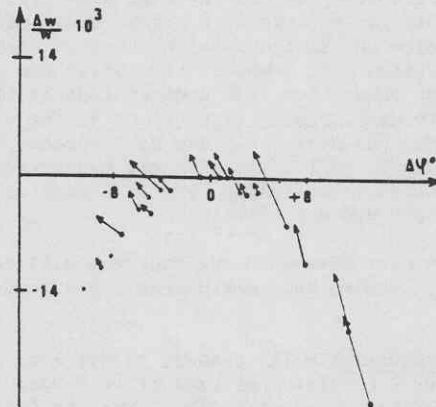


Fig. 8: Effect of axial motion on the longitudinal phase plane. The arrows indicate the difference in output phase space position of a bunch simulated by randomly distributed particles with versus without axial motion (random). Both bunch length and axial amplitude have been enlarged to magnify the effect.

8. Concluding remarks.- By way of conclusion, a few remarks may be made. Let us first consider the bunch compression process studied at GANIL. It is based on one of the first invariants derived for cyclotron motion ; more than ten years ago, Muller has made a proposal for producing a similar effect via voltage gradient. So, neither the basis nor the idea is new. A more complete analysis, including injection problems and longitudinal to radial phenomena however presents a situation such that without detailed computation and without any pos-

sibility of precise adjustments there would have been no hope of obtaining any useful result.

Consider now the 4d motion of a particle in a cyclotron field. This was well known by cyclotronists (if not by synchrotronists) from the early years. The phenomenon is not however usually described in books and not much attention was paid to it for years neither for beam measurements nor for matching.

One can say that one of the facts acting toward cyclotron theory development is computer facility progress. Simulation experiments, which are now possible, permit observation of phenomena and effects which would be inaccessible to experiments because they are mixed with others or are too small to be detected. Optimizations can then be done which would be completely despairing otherwise.

Another fact is of course improvement of technology where tolerances of fabrication, stability of operation reach levels formerly unconceivable.

One of the most important aspects, however, is probably improvement of diagnostics.

Without diagnostics it would be unthinkable of trying to observe or exploit many of the effects discussed. Even the limitations of present diagnostics will often prevent from obtaining as good a performance as computer simulation let expect. Their improvement on the other hand justifies new research and can open new fields of development.

To some extent one can say that after first order properties there are second or higher order properties which are more and more studied and appear more clearly in the operation. In computer simulation the use of second order quantities (rms dimensions or emittances) turns out to be extremely significant in the analysis of phenomena. Any advance in the development of diagnostics and methods well suited for the measurement of these second order values might lead to a greater coupling between theory and experiments.

In any case more and more progress will result from interaction between good measurements and good computations.

9. Acknowledgements.— The present report does not intend to give a complete nor exhaustive review of all the theory developed about cyclotrons over the last few years. Through the submitted abstracts and other work the author was aware of, it tries to show some convergence of efforts and bring some light over old facts, leaving to theoreticians lines of research.

The present review has probably forgotten important facts, it may have very improperly quoted others and for any original work presented, the author is indebted to many other coworkers.

Should all of them find here his acknowledgements and his apologies for omissions and errors.

10. References.—

- (1) W. Joho, High intensity problems in cyclotrons. This conference.
- (2) E.W. Blackmore, D.A. Dohan et al. Developments toward separated turns at TRIUMF. This Conference.
- (3) W.G. Davies. The effects of noise and buncher nonlinearities in the production of very short beam bunches. This Conference.
- (4) A. Goto, Y. Yano et al. Calculation of injection orbit in the IPCR SSC. This Conference.
- (5) L. Aldea, J. Reich, P. Wucherer. The modified center region for the project ISIS at Julich. This Conference.
- (6) F. Marti, M.M. Gordon et al. Design calculations for the central region of the NSCL 500 MeV superconducting cyclotron. This Conference.
- (7) N.C. Bhattacharya, A.S. Divatia. Orbit dynamics for AVF cyclotrons in hard edge approximation. This Conference.
- (8) M. Inoue. Simple estimation of focusing properties of an SSC with soft edge and non zero gradient field. 1981 Part.Accel.Conf.Washington IEEE NS 28 n° 3 pp 2596.2598.
- (9) T.A. Welton, T. Nichols. Orbit dynamics in isochronous cyclotrons. 1981 Part.Accel.Conf.Washington IEEE NS 28 n° 3 pp 2480.2482.
- (10) Mao Bai Chen, D.A. Lind. The numerical calculation of the 3d electric field in the central region of a cyclotron. 1981 Part.Accel.Conf. Washington IEEE NS 28 n° 3 pp 2636.2638.
- (11) A. Chabert, G. Gendreau, J. Sauret et al. Etude théorique et numérique de l'accélération des particules dans les CSS du GANIL. GANIL int. report 77.005.TP.01.
- (12) A. Chabert, G. Gendreau, P. Lapostolle. Limited energy spread in an SSC. Eighth Int. Conf. on Cycl. Bloomington 1978. IEEE Trans NS 26 n° 2 p. 2306-2311.
- (13) A. Carne, P.M. Lapostolle, M. Promé. Accurate beam dynamics equations in proton linear accelerators. Fifth Int. Conf. on H.E. Acc. Frascati 1965, pp. 656-662.
P.M. Lapostolle. Dynamique dans les accélérateurs. Gain d'énergie, déphasage et mouvement radial à la traversée d'un espace d'accélération. CERN. Int. report AR/Int. SG/65.11.
- (14) B. Schnizter. General properties of fields and beam dynamics in a linac gap, CERN report 69-3. Hamiltonian mechanics with a space coordinate as independent variable. Canonical thin lens approximation for an accelerating gap, CERN report 70.7.
- (15) W.M. Schulte, H.L. Hagedoorn. The theory of accelerated particles in cyclotrons. Nucl. Inst. and Meth. 171 (1981) pp. 409.437.
- (16) S. Adam. New proofs and old facts in accelerating theory. This Conference.
- (17) M.M. Gordon. Effect of spiral electric gaps in superconducting cyclotrons. Nucl. Inst. and Meth. 169 (1980) pp. 327-336.
- (18) N. Nakanishi, A. Goto et al. Beam dynamics of the IPCR SSC. This Conference.
- (19) Y. Yano, A. Goto, N. Nakanishi. Initial conditions for well centered orbit in a cyclotron. This Conference.
- (20) M.M. Gordon, F. Marti. Radial longitudinal coupling in cyclotrons and focusing complementarity. MSU report to be published.
- (21) W.M. Schulte, H.L. Hagedoorn. The definition and the use of the central position phase in cyclotrons. Eighth Int. Conf. on Cycl.Bloomington 1978, IEEE Trans NS 26 n° 2 pp. 2388-2391.
- (22) R.K. Bhandari, J. Reich. The Beam handling and

- axial injection system for the project ISIS at Julich. This Conference.
- (23) W.K. Van Asselt, O.C. Dermais et al. The axial injection system at the KVI. This Conference.
- (24) G. Ryckewaert. Axial injection system in cyclotrons. This Conference.
- (25) G. Hinderer. Automatic isochronisation and computer aided centering in the VICKSI cyclotron. Eighth Int. Conf. on Cycl. Bloomington 1978, IEEE Trans NS 26 n° 2, pp. 2355-2357.
- (26) W. Joho, S. Adam. Setting up of the SIN 590 MeV ring cyclotron for single turn extraction. Eighth Int. Conf. on Cycl. IEEE Trans. NS 26, pp. 2358-2361.
S. Adam, J.C. Collins. Automatic centering and matching of cyclotron beams. loc. cit. pp. 2362-2365.
- (27) E.W. Blackmore, M.K. Craddock, G. Dutto et al. Measurements and corrections to the beam properties in the TRIUMF Cyclotron. Eighth Int. Conf. on Cycl. Bloomington 1978, IEEE Trans NS 26 pp. 2371-2374.
- (28) E.D. Courant, H.S. Snyder. Theory of the A.G. synchrotron. Ann. of Physics vol. 3 1958 p. 1-48.
- (29) W. Schott. Status report on SUSE. This Conference.
- (30) W.M. Schulte, H.L. Hagedoorn. Accelerated particles in an AVF Cyclotron with a one or two dee system. Eighth Int. Conf. on Cycl. Bloomington 1978 IEEE Trans NS 26 n° 2 pp. 2329-2333.
- (31) A. Chabert, J. Fermé, P. Lapostolle et al. 1979 Part. Accel. Conf. San Francisco IEEE NS 26 n° 3 pp. 3612-3614.
- (32) A. Chabert, G. Gendreau, P. Lapostolle. Excitation d'instabilités. Défauts de gradient dans GANIL. GANIL Int. Report 81R/020/TP/02.
- (33) J.J. Botman, H.L. Hagedoorn. Median plane effect in the Eindhoven AVF cyclotron. 1981 Part. Accel. Conf. Washington IEEE NS 28 n° 3 pp. 2128-2130.
- (34) D.L. Friesel, J. Dreisbach. Crossing the $v_z = 1$ resonance in the IUCF main tige. This Conference.
- (35) R.W. Muller, R. Mahrt. Phase compression and phase dilatation in isochronous cyclotrons. Nucl. Inst. and Meth. 86 (1970) pp. 241-244.
- (36) A. Chabert, G. Gendreau, P. Lapostolle, P. Yvon. Bunch length compression inside an SS Isoch. Cycl. and related problems. 1981 Part. Accel. Conf. Washington IEEE NS 28 n° 3 pp. 2122-2124.
- (37) W.M. Schulte, H.L. Hagedoorn, C.J.A. Corsten. A method to obtain single turn extraction for a large phase width in cyclotrons. Eighth Int. Conf. on Cycl. Bloomington 1978. IEEE Trans NS 26 n° 2 pp. 2392-2395.
- (38) A. Chabert, G. Gendreau, P. Lapostolle. Augmentation d'émission radiale dans le processus de compression de phase par défaut d'isochronisme. GANIL int. report 80R/142/TP.09.
- (39) A. Chabert, G. Gendreau, P. Lapostolle. Effet des oscillations axiales sur la dynamique des particules dans les CSS du GANIL. GANIL int. report 80R/149/TP.11.

(40) M.M. Gordon, F. Marti. Electric focusing in cyclotrons with unusual dees. Particle Accelerators 1980 (vol.11) pp. 161-172.

(41) G. Dutto, M.K. Craddock. Focusing in rf accelerating gaps with asymmetrically curved electric equipotentials, Seventh Int. Conf. on Cycl. Zurich, Birkauser, Basel 1975, pp.271-274.

Note on axial motion perturbation.

Another perturbation comes from electric focusing as shown by M.M. Gordon and F. Marti⁽⁴⁰⁾. Their theory makes use of a treatment of rf cavity effects derived by G. Dutto et al⁽⁴¹⁾ which has some analogy with the representation given above in par. 2.4 provided, however, the derivation is there pushed to second order.

Close to $v_z = 1$ as is the case for the Indiana injector cyclotron a stop band is opened and instability develops ; the width of the stop band and the resulting amplitude growth during acceleration depend on the rf harmonic of operation through a factor which can be expressed in terms of A as introduced in (12) for the radial motion. For both axial and radial motion considerations A must be kept small.

In the case of spiral dees and spiral electric gaps, the axial focusing is further modified (as well as the radial focusing) ; the sign of the changes depends on the relative direction of the spiral with respect to the rotation of the particles.

" DISCUSSION "

M. REISER : I have a comment and a question. The comment is that one gets phase compression also due to time of flight effects in the RF gaps at low energies. The question is whether you studied the possibility of using the phase compression effect to counteract longitudinal space charge effects ?

P. LAPOSTOLLE : I agree with your comment ; this transit time effect comes into my mind in the Müller's voltage ramp compression method. As far as the effect of space charge, we did not study it, since we are far, for GANIL, from intensities where it plays a role. I think however that our scheme is exactly equivalent to a classical bunching system (buncher + drift) and space charge has for us the same kind of effect as it has there.

H. BLOSSER : Did you consider correcting for the injection magnet perturbation by putting in four magnets, one in every valley ?

P. LAPOSTOLLE : No, unfortunately two valleys are occupied by RF cavities.

BUNCH LENGTH COMPRESSION INSIDE A SEPARATED SECTOR ISOCRONOUS CYCLOTRON AND RELATED PROBLEMS

by A. Chabert, G. Gendreau, P. Lapostolle and P. Yvon
GANIL BP 5027 14021 Caen Cedex (France)

Bunch compression inside an isochronous cyclotron can be achieved by means of a field perturbation. In order to reduce the energy spread this perturbation is applied at injection over less than one tenth of the accelerated orbits. Injection phase has then to be displaced and energy gain over the first turn is reduced by about the same ratio as the bunch compression one aims at. If a precessional injection is therefore used, for a relativistic cyclotron with a large number of turns the radial beam emittance has been found to exhibit a large increase. A simple method to overcome this difficulty by a slight additional field perturbation over the remainder of the acceleration has been found and successfully tested by numerical simulation. It is intended to use this possibility on the GANIL SSC's.

1. INTRODUCTION

In a cyclotron, the energy spread depends on the length of the accelerated bunches. In an SSC with a large energy gain, if one is using an r.m.s. definition of energy spread $\pm \Delta W$ and of bunch length $\pm \Delta \phi$ (in radian) as twice the square root of the centered second moment (which is not far, for practical distributions, from half maximum width) [1], one has :

$$\pm \Delta W_{out} = \pm \sqrt{(\Delta W_{in})^2 + W_{out}^2 (\Delta \phi_{in}/2)^2} \quad (1)$$

where the subscripts refer to input and output and the phase width is supposed constant during acceleration.

In order to achieve a small energy spread, $\Delta \phi$ has to be small. Instead of cutting in $\Delta \phi$ which reduces the intensity, $\Delta \phi$ can be minimized by matching in longitudinal phase space $\Delta \phi$, ΔW . Such a matching is normally made by a proper use of drift spaces and rebunchers i.e. beam transport focusing devices and additional RF cavities, both elements which exist inside a cyclotron. What is presented here is a way to achieve optimum matching in longitudinal phase space in a cyclotron for minimizing energy spread, a description of some of the difficulties encountered and a solution to overcome them.

2. COMPRESSION MECHANISM

Let us consider a cyclotron where the magnetic field B_0 departs by ΔB_0 from isochronism at injection and over some distance in radius (or energy).

In the ϕ, W plane the longitudinal motion of a particle in a cyclotron obeys the equations [2], [3]

$$d\phi/dN = - (2\pi h \cdot \Delta B_0/B_0 + \sin \phi) d(eV)/dW \quad (2)$$

$$dW/dN = eV \cdot \cos \phi \quad (3)$$

from which one has :

$$eV \cdot \sin \phi + \int 2\pi h \cdot (\Delta B_0(W)/B_0) dW = C^t \quad (4)$$

for each particle. Here V is the RF accelerating voltage of harmonic number h and N the number of turns.

Considering two particles separated by $\Delta \phi$, ΔW and of central phase ϕ_c , a comparison between input and output, gives :

$$\begin{aligned} (eV \cdot \cos \phi_c \Delta \phi + 2\pi h \cdot (\Delta B_0/B_0) \cdot \Delta W)_{out} = \\ (eV \cdot \cos \phi_c \Delta \phi + 2\pi h \cdot (\Delta B_0/B_0) \cdot \Delta W)_{in} \end{aligned} \quad (5)$$

This relation offers a method for compressing the bunch length inside an SSC : assuming $\Delta B_{out} = 0$ and for instance, two particles of the same initial energy ($\Delta W_{in} = 0$), one gets

$$(V \cos \phi_c \Delta \phi)_{out} = (V \cos \phi_c \Delta \phi)_{in} \quad (6)$$

In order to change $\Delta \phi$ one may change V as already suggested by Muller and Mahrt [3] ; it is also possible to change ϕ_c . This is obtained from a field perturbation.

In practice the compression is made quickly after injection (over one tenth of the number of turns) in order that acceleration be made mostly with a small bunch length.

Neglecting the spread in energy occurring during compression by a factor C , while the bunch length is not yet fully reduced, expression (1) for output energy spread can be replaced by :

$$\pm \Delta W_{out} = \pm \sqrt{C \cdot (\Delta W_{in})^2 + W_{out}^2 (\Delta \phi_{in}/2C)^2} \quad (7)$$

Even if one keeps in mind that this value has to be slightly increased to include the growth during compression, relation (7) shows how to optimize the compression factor C in order to minimize energy spread :

$$C_{opt}^3 = (W_{out}/\Delta W_{in}) \cdot (\Delta \phi_{in}^2/2V^2) \quad (8)$$

For such a value, longitudinal emittance grows by 30 (plus the additional effect mentioned above) ; one may be tempted to go in compression slightly over the optimum in order to reduce this growth while not increasing very much ΔW_{out} over the minimum which is quite flat, but the general behaviour is well described by (7).

3. PRECESSIONAL INJECTION

According to (6) the product of energy gain per turn by bunch length is the same at injection as at the end of the compression process. In order to reach a reasonable compression factor, the energy gain and hence the turn to turn separation must be appreciably reduced at injection. Special schemes may have to be introduced.

For GANIL, a precessional method with an amplitude of about 2.5cm was found satisfactory for injection. Such a device, without compression had already been considered previously as an help for extraction [4] and had not exhibited in computer simulation any parasitic difficulty. Similarly, simulation studies of an operation slightly out of isochronism but without precession in order to make possible a sharp cut in bunch length had shown no problem [1].

The test of compression with precessional injection on the contrary, if satisfactory in terms of compression was disastrous in terms of radial emittance at the end of acceleration when minimizing energy spread.

Assuming as a simple approximation, that one can adjust ϕ_{c1} and $\delta B_0/B_0$ without changing ΔW_1 and $\int_{W_1}^{\Delta W} dW$

it becomes possible to make ΔW_{out} and $\Delta \psi$ simultaneously equal to 0 and to minimize energy spread and radial emittance. In practice ϕ_{c1} is directly dependant upon ϕ_{cin} even if the compression reduces its excursion, but ΔW_1 and the small integral (16) also change with ϕ_{cin} . Nevertheless, the general behaviour is not modified : fig. 3 and 4 illustrate the compensation mechanism.

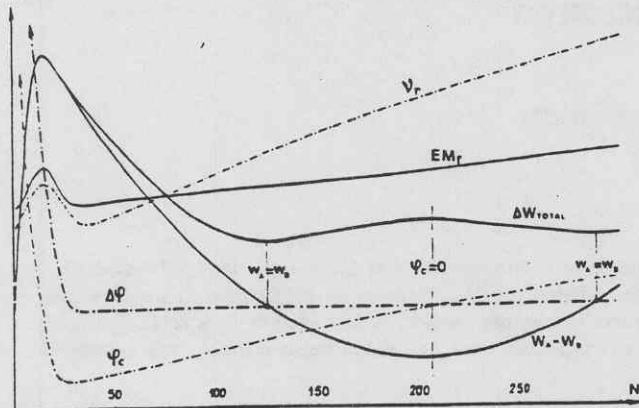


Fig. 3

Mechanism of radial emittance growth compensation. One may comment on the various curves : V_r increases linearly with the number N of turns except at the beginning of acceleration due to compression field perturbation. ϕ_c follows a law of the type shown on fig. 1 curve 2. $\Delta \phi$ is compressed fast and stays constant during the rest of acceleration. $W_s - W_0$ comes to a large value during compression ; it then goes through zero, becomes negative and comes back to zero at the end of acceleration. Radial normalized emittance increases slowly as explained on paragraph 6.

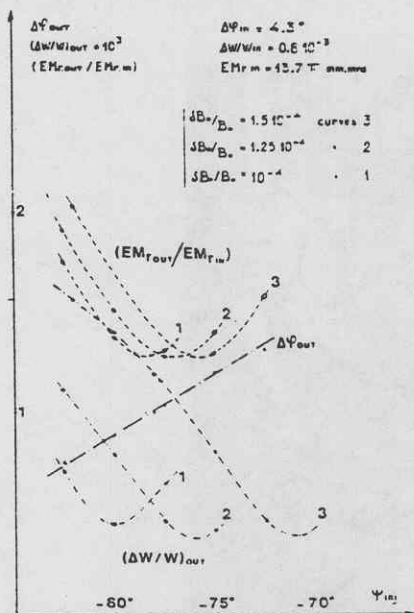


Fig. 4

Effect on radial normalized emittance and on energy spread of a change in injection central phase and in compensation field δB_0 : $\phi_{inj} = -77^\circ$ on curve 2 gives a good operation, corresponding to fig. 3. Tolerances adjustment appear clearly.

Fig. 4 also indicates the required tolerances. Injection phase ϕ_{cin} adjustment accuracy is mainly required for minimizing energy spread : it is the same as without compression and compensation. Field correction δB_0 has to be quite tightly adjusted but a change of 10^{-5} moves the output phase by 2.5° and phase measurements make such an accuracy accessible.

6. EMITTANCE GROWTH DUE TO INITIAL ENERGY SPREAD

As shown by SCHULTE [6], even without any phase wandering during acceleration, there is a slight growth in radial emittance when a precessional oscillation is established. This author studied its incidence on a precessional extraction mechanism. Such an effect also exists in the case studied here, with the same amplitude and same properties. It should be included in the reference emittance EM_{r0} of (11). It is responsible for the slow growth seen on Fig. 3.

7. CONCLUSION

A method of matching longitudinal phase space during the early part of acceleration inside an SSC has been successfully tested on numerical simulation for GANIL SSC's. Tolerances required are not tighter than for normal operation. The effect of field errors has also been studied [5] and no special effect has been found with them. Such a method economizes the use of rebuncher and should offer the possibility of a better matching. It is foreseen for the operation of GANIL.

BIBLIOGRAPHY

- [1] A. Chabert, G. Gendreau, P. Lapostolle - Limited energy spread in an SSC. 8th International Conference on Cyclotrons and their Applications - Bloomington 1978. IEEE Trans NS-26 - April 1979 pp. 2306 - 2309.
- [2] J.J. Livingood - Principles of cyclic particle accelerators - D. Van Nostrand 1961 pp. 136-137.
- [3] R.W. Muller, R. Mahrt - Phase compression and phase dilatation in isochronous cyclotron - Nucl. Instr. and Method. 86 (1970) pp. 241-244.
- [4] A. Chabert, J. Fermé, G. Gendreau, P. Lapostolle, P. Yvon : Chromatic correlations at injection and related ejection problems in separated sector cyclotrons. 1979 Particle Accelerator Conference San-Francisco 1979 - IEEE Trans NS-26 -June 1979 pp. 3612-3614.
- [5] A. Chabert, G. Gendreau, P. Lapostolle : Augmentation d'emittance radiale dans le processus de compression de phase par défaut d'isochronisme. GANIL 80R/142/TP/09 - Nov. 1980.
- [6] W.M. Schulte : A method to obtain single turn extraction for large phase width in cyclotrons. 8th International Conference on Cyclotrons and their Applications - Bloomington 1978 - pp. 2392 - 2395.

Ion motion in a small low energy cyclotron

Kirk J. Bertsche¹

Lawrence Berkeley Laboratory, University of California, Berkeley, CA 94720, USA

Received 28 September 1990

A small cyclotron (the “cyclotrino”) was proposed for direct detection of radiocarbon in 1980 and has now detected radiocarbon at natural abundance. High resolution and background rejection are achieved in this cyclotron by acceleration of negative ions through many turns while operating at a high harmonic. This article details the analysis of ion motion in a small flat-field, electrostatically-focused cyclotron. Included are discussions of beam acceptance, axial and radial beam stability, and a detailed analysis of phase bunching and its effect on mass resolution.

1. Introduction

The small cyclotron project was begun at Berkeley in 1981 [1] in response to the increasing demand and high cost of existing accelerator mass spectrometry (AMS) techniques. The basic idea was to combine the excellent properties of a cyclotron used as a mass spectrometer

with the capabilities of negative ion sources to reject unwanted backgrounds such as ^{14}N [2,3].

A small cyclotron (the “cyclotrino”) was built at Berkeley to test these concepts [4–7]. This cyclotron incorporated a miniature Cs sputter negative ion source at the center of the cyclotron, injecting negatively-charged carbon ions at about 3 keV. Extraction energy was about 40 keV at about a 10.5 cm radius. The cyclotron was operated at the 11th to 15th harmonic to obtain the necessary resolution and relied solely on electrostatic focusing for ion confinement. It was found

¹ Present address: Center for Accelerator Mass Spectrometry, Lawrence Livermore National Laboratory, P.O. Box 808, L-397, Livermore, CA 94551, USA.

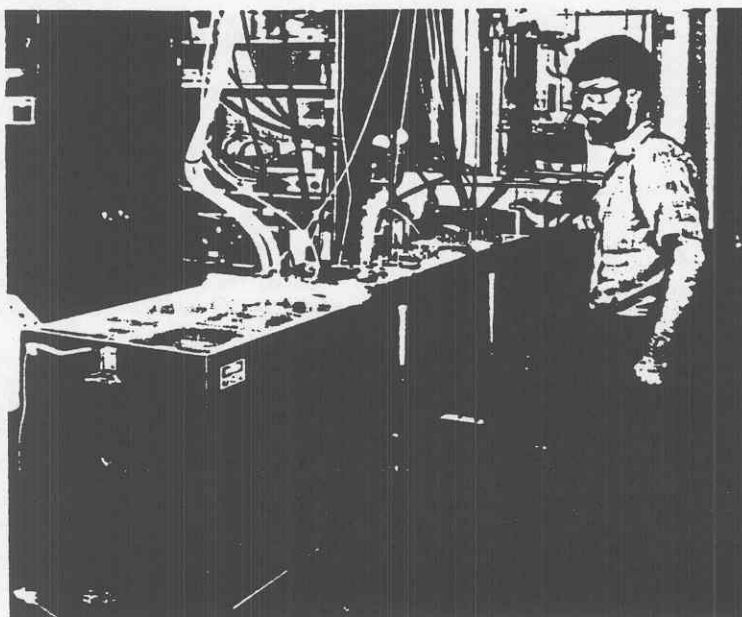


Fig. 1. External view of the cyclotrino. The ion source is enclosed in the cage on the left. The author is adjusting the dee probe.

that such a device did indeed produce the necessary resolution for detection of ^{14}C , although radiocarbon at natural abundance could not be detected because of the low output of the internal ion source which was used.

The cyclotron was rebuilt to provide for a high-current external ion source [8–10]. This cyclotron is very similar in design to the earlier machine, with the addition of an external ion source and injection beamline, and is shown in fig. 1. Radiocarbon has been detected at natural abundance in this device [10–12].

Our initial work has emphasized ^{14}C . Measurements of other radioisotopes, such as ^{26}Al , ^{10}Be and ^3He are also possibilities with the cyclotron but have not been pursued.

2. Design considerations

The cyclotron which we have studied is a two-dee cyclotron, each dee subtending 180° . Thus the electric fields are imposed at two positions in the particle's orbit, displaced 180° from each other. In such a design the electric fields may be driven at the cyclotron frequency or at any odd harmonic of the cyclotron frequency. Harmonic operation will improve the resolution of a cyclotron used as a mass spectrometer, since mass resolution is roughly proportional to the product of the number of turns and the harmonic [4,6].

We use sinusoidal excitation, though with the relatively low rf voltages occurring in a cyclotron used as a low-energy mass spectrometer, nonsinusoidal excitation could be considered and has been suggested by other researchers [13].

The cyclotron was designed specifically for ^{14}C . It operates with negative ions to avoid inference from ^{14}N . With ^{14}N eliminated, the nearest interfering mass is the molecular ion ^{13}CH , which is heavier than ^{14}C by a part in 1800. This sets the minimum resolution requirements. The necessary resolution is obtained by operating at a high harmonic (11th to 15th) of the fundamental cyclotron frequency and by using a very flat magnetic field, which causes orbits to be isochronous and hence allows ions to make many turns (50 to 100) in the cyclotron.

For operation with ^{14}C , we use a magnetic field of about 1 T. Beam is injected at an energy of 5 keV with a 2.8 cm radius and extracted at about 40 keV with a 10 cm radius. Ions must gain about 260 eV in the first two gap crossings for about half of them to clear an electrostatic deflection channel in the center of the cyclotron (see section 3).

This cyclotron is typically operated with a harmonic of 11 to 15 and a peak dee voltage of 300 to 400 V. The cyclotron frequency is about 1 MHz with a magnetic field of about 1 T, so the dees must be driven at 11 to 15 MHz at 600 to 800 V peak-to-peak.

Beam from an external, high current negative ion source is captured by an electrostatic einzel lens, pre-separated by a Wien filter, and focused by a series of electrostatic quadrupole lenses. It is then injected radially into the cyclotron using electrostatic deflectors and an electrostatic mirror [14]. The system is shown schematically in fig. 2.

3. Energy gain

Calculation of the electric field distribution across the dee gap allows energy gain per turn, turn separation, and number of turns to be calculated. The field distribution may be analytically solved using certain approximations.

Firstly, the electrostatic approximation may be employed. In this cyclotron, the time taken for the electric field to propagate in the gap region is so small as to be negligible, i.e. $b/c \ll 1/\omega_{\text{rf}}$, where b is the dee height, c is the speed of light, and ω_{rf} is the rf frequency. Thus, the electric potential distribution between the dees is approximately that for an electrostatic problem; the solution is simply the electrostatic potential with a time-varying amplitude.

Secondly, it may be assumed that the gap between the dees is infinitesimal. While this assumption is not necessary (solutions for the case of a finite gap have been presented by Murray and Ratner [15] and Reiser [16]), it simplifies the computations greatly and is a good approximation for this cyclotron. The dees are not excited at extremely high voltages, so it has been possi-

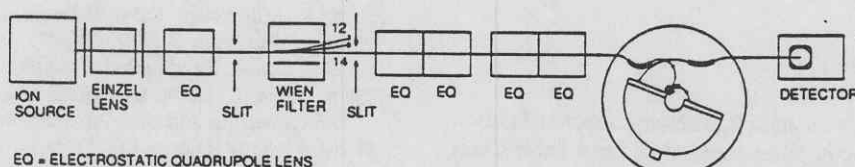


Fig. 2. Cyclotron system schematic, showing injection beamline. The einzel lens and first quadrupole focus beam onto the Wien filter object slit. The Wien filter preseparates beam and provides monitoring of ion source output. The four remaining quadrupoles focus beam into the cyclotron.

ellipse at the dee gap with semi-axes of 2 mm and 20 mrad, matching the cyclotron's axial acceptance almost exactly.

In fig. 10a, the axial acceptance for 11th harmonic and 300 V peak is shown. Offsetting the frequency slightly, so that ions which enter with a 30° phase lag also exit with a 30° phase lag, improves the acceptance slightly (fig. 10b). When losses due to first turn clearance (assuming 1 mm clearance, which is necessary for about half of the ions to clear) are included (fig. 10c), it is seen that many ions are lost when operating with a 300 V peak rf voltage. Operation with 400 V peak and 15th harmonic (fig. 10d) results in about the same resolution as 300 V peak and 11th harmonic, but gives lower loss due to the higher voltage. It was found experimentally that increasing the rf voltage from 300 to 400 V approximately doubled the transmission through the cyclotron.

These axial acceptance plots are in general agreement with those published earlier [4,6]. However, these newer simulations indicate that the acceptance for this new system is not quite so symmetric and encloses a somewhat smaller area. This is probably due to a higher ion injection energy and to the inclusion of phase bunching in the computer simulations.

Useful phase acceptance is estimated to be about 45° , based on figs. 10a–d. If ion phase is less than about 15° , the axial acceptance shrinks dramatically due to insufficient axial focusing. If ion phase exceeds about 60° , not enough energy is gained to clear the inner deflector on the first turn.

6. Conclusions

Ion motion in a small, low energy, flat field cyclotron has been analyzed in detail. Approximate analytic expressions have been presented for energy gain, electrostatic focusing, and phase bunching. Computer simulations of acceptance, number of turns, and mass resolution have been presented as well.

It has been shown that such a cyclotron can provide the necessary resolution for detecting ^{14}C , with good phase space matching to physically-realizable ion beams. This has been experimentally verified [10–12]. It is also seen that the resolution of the cyclotron may be increased beyond that necessary for ^{14}C , suggesting that other isotopes may be detected as well [10–12].

Acknowledgements

I wish to thank Chandu Karadi and Gabriel Paulson for assistance in computer simulations, and Dave Clark and Jim Welch for helpful discussions. This work has

been supported by the U.S. Department of Energy under contract DE-AC03-76SF00098.

References

- [1] R.A. Muller, P.P. Tans, T.S. Mast and J.J. Welch, Proc. Symp. on Accelerator Mass Spectrometry, Argonne National Laboratory, 1981, Argonne National Laboratory rep. ANL/PHY-81-1 (1981) p. 342.
- [2] D.E. Nelson, R.G. Korteling and W.R. Stott, Science 198 (1977) 507.
- [3] C.L. Bennett, R.P. Beukens, M.R. Clover, H.E. Gove, R.B. Liebert, A.E. Litherland, K.H. Purser and W.E. Sondheim, Science 198 (1977) 508.
- [4] J.J. Welch, PhD dissertation, Lawrence Berkeley Laboratory rep. LBL-21255 (1984).
- [5] J.J. Welch, K.J. Bertse, P.G. Friedman, D.E. Morris, R.A. Muller and P.P. Tans, Nucl. Instr. and Meth. B5 (1984) 230.
- [6] J.J. Welch, K.J. Bertse, P.G. Friedman, D.E. Morris, R.A. Muller and P.P. Tans, Nucl. Instr. and Meth. B18 (1987) 202.
- [7] J.J. Welch, K.J. Bertse, P.G. Friedman, D.E. Morris and R.A. Muller, in UC Accelerator Mass Spectrometry I: Proc. 1st University of California Conf. on Accelerator Mass Spectrometry, University of California, Irvine, 1986, eds. J.E. Ericson and R.E. Taylor (Institute of Geophysical and Planetary Physics, University of California, Lawrence Livermore National Laboratory, 1989) CONF-8602126.
- [8] K.J. Bertse, P.G. Friedman, D.E. Morris, R.A. Muller and J.J. Welch, Nucl. Instr. and Meth. B29 (1987) 105.
- [9] K.J. Bertse, P.G. Friedman, R.A. Muller and J.J. Welch, Lawrence Berkeley Laboratory rep. LBL-25450 (1988).
- [10] K.J. Bertse, PhD dissertation, Lawrence Berkeley Laboratory rep. LBL-28106 (1989).
- [11] K.J. Bertse, C.A. Karadi, R.A. Muller and G.C. Paulson, Nucl. Instr. and Meth. B52 (1990) 398.
- [12] K.J. Bertse, C.A. Karadi and R.A. Muller, Nucl. Instr. and Meth. 6248.
- [13] M. Chen, D. Li, W. Gao, X. Zhang and R. Zhou, Nucl. Instr. and Meth. A278 (1989) 409.
- [14] D.E. Morris, Nucl. Instr. and Meth. A248 (1986) 297.
- [15] R.L. Murray and L.T. Ratner, J. Appl. Phys. 24 (1953) 67.
- [16] M. Reiser, J. Appl. Phys. 42 (1971) 4128.
- [17] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik, Table of Integrals, Series, and Products, corrected and enlarged edition (Academic Press, London, 1980).
- [18] J.J. Livingood, Cyclic Particle Accelerators (Van Nostrand, Princeton, 1961).
- [19] B.L. Cohen, Rev. Sci. Instr. 24 (1953) 589.
- [20] C.D. Jeffries, Phys. Rev. 81 (1951) 1040.
- [21] Lj.S. Milinković, K.M. Subotić and E. Fabrici, Nucl. Instr. and Meth. A273 (1988) 87.
- [22] B.L. Cohen, Handbuch der Physik 44 (1959) 105.
- [23] M. Chen, D. Li, W. Gao and S. Xu, Proc. 11th Int. Conf. on Cyclotrons and their Applications (Tokyo, 1987).
- [24] M. Chen, W. Gao and D. Li, Nucl. Instr. and Meth. A278 (1989) 402.

NOTE

Sur la Théorie de la Variation des constantes arbitraires ;

PAR J. LIOUVILLE.

Soient n un nombre entier positif, x une fonction de t dont nous désignerons par x' , x'' , ..., $x^{(n)}$ les dérivées successives, prises par rapport à t , et P une fonction quelconque de t , x , x' , ..., $x^{(n-1)}$. Si l'on sait intégrer l'équation différentielle de l'ordre n ,

$$(1) \quad x^{(n)} = P,$$

il sera facile d'intégrer ensuite par approximation l'équation nouvelle

$$(2) \quad x^{(n)} = P + Q,$$

dans laquelle on suppose que le terme Q reste toujours très petit. Et même si Q désigne une fonction donnée quelconque de t , et que l'équation (1) soit linéaire, on parvient à intégrer complètement l'équation (2). La méthode que les géomètres suivent ordinairement pour atteindre ce but consiste à faire varier les constantes arbitraires contenues dans l'intégrale complète $x = f(t, a, b, \dots c)$ de l'équation (1), de telle sorte que l'équation (2) soit satisfaite aussi par $x = f(t, a, b, \dots c)$. Cela revient au fond à remplacer l'inconnue x par n inconnues $a, b, \dots c$, entre lesquelles on pourra d'ailleurs établir à volonté $(n-1)$ relations. Les relations dont nous parlons deviennent très simples quand on assujétit les valeurs de dx , d^2x , ..., $d^{n-1}x$ à conserver la même forme dans le cas de l'équation (2) et dans le cas de l'équation (1).

Pour déterminer $a, b, \dots c$ en fonction de t , on obtient dans cette hypothèse les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{da} \cdot \frac{da}{dt} + \frac{dx}{db} \cdot \frac{db}{dt} + \dots + \frac{dx}{dc} \cdot \frac{dc}{dt} &= 0, \\ \frac{dx'}{da} \cdot \frac{da}{dt} + \frac{dx'}{db} \cdot \frac{db}{dt} + \dots + \frac{dx'}{dc} \cdot \frac{dc}{dt} &= 0, \\ \dots &\dots \\ \frac{dx^{(n-2)}}{da} \cdot \frac{da}{dt} + \frac{dx^{(n-2)}}{db} \cdot \frac{db}{dt} + \dots + \frac{dx^{(n-2)}}{dc} \cdot \frac{dc}{dt} &= 0, \\ \frac{dx^{(n-1)}}{da} \cdot \frac{da}{dt} + \frac{dx^{(n-1)}}{db} \cdot \frac{db}{dt} + \dots + \frac{dx^{(n-1)}}{dc} \cdot \frac{dc}{dt} &= Q. \end{aligned}$$

Il s'agit d'en tirer les valeurs de $\frac{da}{dt}, \frac{db}{dt}, \dots \frac{dc}{dt}$, et c'est ce qu'on peut toujours faire à l'aide de la règle donnée par Laplace pour résoudre les équations du premier degré, quel que soit le nombre des inconnues.

D'après cette règle on formera d'abord le dénominateur commun des inconnues $\frac{da}{dt}, \frac{db}{dt}, \dots \frac{dc}{dt}$, à l'aide des coefficients $\frac{dx}{da}, \frac{dx}{db}$, etc., de ces inconnues. On aura ensuite le numérateur de la fraction qui exprime $\frac{da}{dt}$, par exemple, en remplaçant dans le dénominateur commun $\frac{dx^{(n-1)}}{da}$ par Q , et $\frac{dx^{(n-1)}}{da}, \dots \frac{dx'}{da}, \frac{dx}{da}$ par zéro.

On peut simplifier le calcul toutes les fois que la fonction P est indépendante de $x^{(n-1)}$, c'est-à-dire toutes les fois que $\frac{dP}{dx^{(n-1)}} = 0$. Je me propose dans cette Note de prouver qu'alors le dénominateur commun des quantités $\frac{da}{dt}, \frac{db}{dt}, \dots \frac{dc}{dt}$, ne contient pas t explicitement et n'est fonction que de $a, b, \dots c$; on verra même qu'il se réduit à l'unité lorsque $a, b, \dots c$ représentent les valeurs de $x, x', \dots x^{(n-1)}$, relatives à une valeur particulière de t , telle que $t=0$.

Pour donner de ce théorème une démonstration générale, je représente par u le dénominateur commun et je cherche sa dérivée $\frac{du}{dt}$ prise par rapport à t , en tant que cette lettre entre explicitement dans u , sans que l'on fasse varier les constantes $a, b, \dots c$. La valeur

de u se compose d'une série de termes, les uns positifs, les autres négatifs : le premier de ces termes est par exemple

$$\frac{dx}{da} \cdot \frac{dx'}{db} \dots \frac{dx^{(n-1)}}{dc}.$$

D'après un théorème connu, la valeur de u doit devenir nulle si l'on rend égaux entre eux les coefficients de $\frac{da}{dt}$, ceux de $\frac{db}{dt}$, ... ceux de $\frac{dc}{dt}$, dans deux des équations du problème. Si donc on remplace partout dans l'expression de u une des dérivées $x^{(i)}$ par une autre dérivée ayant un indice différent de i et compris dans la série 0, 1, 2, ... $(n-1)$, il faudra que u se réduise à zéro après ce changement effectué.

Cela posé j'observe que, pour trouver $\frac{du}{dt}$, on peut différencier dans u successivement x , x' , ... $x^{(n-1)}$, $x^{(n-1)}$, et ajouter les résultats partiels ainsi obtenus. Or, différencier x , c'est remplacer x par x' , et par ce changement u devient zéro; de même différencier x' ... ou $x^{(n-1)}$, c'est remplacer x' ... ou $x^{(n-1)}$ par x'' ... ou $x^{(n)}$, ce qui donne encore zéro pour résultat. Quant à la différenciation qui porte sur $x^{(n-1)}$, on l'effectuera en remplaçant $x^{(n-1)}$ par $x^{(n)}$ ou par P . Donc finalement la valeur de $\frac{du}{dt}$ se composera de termes de la forme

$$\frac{dx}{da} \cdot \frac{dx'}{db} \dots \frac{dP}{dc}.$$

Mais P étant fonction de t , x , x' , ... $x^{(n-1)}$, on a

$$\frac{dP}{dc} = \frac{dP}{dx} \cdot \frac{dx}{dc} + \frac{dP}{dx'} \cdot \frac{dx'}{dc} + \dots + \frac{dP}{dx^{(n-1)}} \cdot \frac{dx^{(n-1)}}{dc}.$$

On trouve des valeurs semblables pour les dérivées $\frac{dP}{da}$, $\frac{dP}{db}$, ... En les substituant dans l'expression de $\frac{du}{dt}$, celle-ci se décompose en plusieurs parties qui ont pour facteurs respectifs $\frac{dP}{dx}$, $\frac{dP}{dx'}$, ... $\frac{dP}{dx^{(n-1)}}$ et qui sont nulles d'elles-mêmes, comme il est aisé de le voir d'après ce que l'on a expliqué plus haut.

Donc enfin l'on a $\frac{du}{dt} = 0$, en sorte que le dénominateur u ne contient pas t explicitement, et se réduit à une simple fonction de $a, b, \dots c$. Ainsi la valeur de u ne changera pas si l'on pose $t = 0$. Mais quand $a, b, \dots c$ représentent les valeurs initiales de $x, x', \dots x^{(n-1)}$, le premier terme de u , savoir $\frac{dx}{da} \cdot \frac{dx'}{db} \dots \frac{dx^{(n-1)}}{dc}$, se réduit à l'unité pour $t = 0$, et les autres deviennent nuls dans la même hypothèse : on a par suite alors $u = 1$, ce qu'il fallait démontrer.

L'analyse précédente exige que P ne contienne pas la dérivée $x^{(n-1)}$, mais seulement les dérivées d'ordre inférieur à $(n - 1)$. Si P contenait $x^{(n-1)}$, on trouverait de la même manière

$$\frac{du}{dt} = u \frac{dP}{dx^{(n-1)}}.$$

Ces considérations générales deviennent beaucoup plus claires lorsqu'on les applique au cas particulier où $n = 3$.

On a alors

$$\begin{aligned} u = & \frac{dx}{da} \cdot \frac{dx'}{db} \cdot \frac{dx''}{dc} - \frac{dx}{da} \cdot \frac{dx'}{dc} \cdot \frac{dx''}{db} \\ & + \frac{dx}{dc} \cdot \frac{dx'}{da} \cdot \frac{dx''}{db} - \frac{dx}{db} \cdot \frac{dx'}{da} \cdot \frac{dx''}{dc} \\ & + \frac{dx}{db} \cdot \frac{dx'}{dc} \cdot \frac{dx''}{da} - \frac{dx}{dc} \cdot \frac{dx'}{db} \cdot \frac{dx''}{da}; \end{aligned}$$

et par le calcul direct, on trouve, en omettant les termes qui se détruisent, et en remplaçant x''' par P ,

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} = & \frac{dx}{da} \cdot \frac{dx'}{db} \cdot \frac{dP}{dc} - \frac{dx}{da} \cdot \frac{dx'}{dc} \cdot \frac{dP}{db} \\ & + \frac{dx}{dc} \cdot \frac{dx'}{da} \cdot \frac{dP}{db} - \frac{dx}{db} \cdot \frac{dx'}{da} \cdot \frac{dP}{dc} \\ & + \frac{dx}{db} \cdot \frac{dx'}{dc} \cdot \frac{dP}{da} - \frac{dx}{dc} \cdot \frac{dx'}{db} \cdot \frac{dP}{da}, \end{aligned}$$

expression qui devient nulle en effet, lorsqu'on met au lieu de $\frac{dP}{da}, \frac{dP}{db}, \frac{dP}{dc}$ leurs valeurs respectives

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dx} \cdot \frac{dx}{da} + \frac{dP}{dx'} \cdot \frac{dx'}{da}, \\ \frac{dP}{dx} \cdot \frac{dx}{db} + \frac{dP}{dx'} \cdot \frac{dx'}{db}, \\ \frac{dP}{dx} \cdot \frac{dx}{dc} + \frac{dP}{dx'} \cdot \frac{dx'}{dc},\end{aligned}$$

qui sont exactes dès que P est une fonction de t, x, x' indépendante de x'' . Mais ces valeurs devraient être augmentées des termes suivants $\frac{dP}{dx''} \cdot \frac{dx''}{da}, \frac{dP}{dx''} \cdot \frac{dx''}{db}, \frac{dP}{dx''} \cdot \frac{dx''}{dc}$, si P contenait x'' . Aussi dans ce cas $\frac{du}{dt}$ est $= u \frac{dP}{dx''}$ et non plus $= 0$.

En supposant P indépendant de $x^{(n-1)}$, et admettant que a, b , etc., soient les valeurs initiales de x, x' , etc., on a

$$\begin{aligned}\frac{da}{dt} &= -Q \frac{dx}{db}, \\ \frac{db}{dt} &= Q \frac{dx}{da},\end{aligned}$$

pour $n = 2$; puis

$$\begin{aligned}\frac{da}{dt} &= \left(\frac{dx}{db} \cdot \frac{dx'}{dc} - \frac{dx}{dc} \cdot \frac{dx'}{db} \right) Q, \\ \frac{db}{dt} &= \left(\frac{dx}{dc} \cdot \frac{dx'}{da} - \frac{dx}{da} \cdot \frac{dx'}{dc} \right) Q, \\ \frac{dc}{dt} &= \left(\frac{dx}{da} \cdot \frac{dx'}{db} - \frac{dx}{db} \cdot \frac{dx'}{da} \right) Q,\end{aligned}$$

pour $n = 3$; et ainsi de suite.

Lorsque $n = 2$, si Q est de la forme $-\frac{dR}{dx}$, R étant une fonction de t et x seulement, il vient

$$\begin{aligned}\frac{da}{dt} &= \frac{dR}{dx} \cdot \frac{dx}{db} = \frac{dR}{db}, \\ \frac{db}{dt} &= -\frac{dR}{dx} \cdot \frac{dx}{da} = -\frac{dR}{da},\end{aligned}$$

ce qui s'accorde avec les formules connues.

Toutes les fois que la somme

$$\frac{dP_1}{dx_1} + \frac{dP_2}{dx_2} + \dots + \frac{dP_n}{dx_n}$$

se réduit à zéro, on a

$$\frac{du}{dt} = 0,$$

en sorte que le dénominateur u est alors indépendant de t . Si donc on suppose que $a, b, \dots c$ représentent les valeurs de $x_1, x_2, \dots x_n$ pour $t = 0$, et si l'on prend positivement le terme $\frac{dx_1}{da} \cdot \frac{dx_2}{db} \dots \frac{dx_n}{dc}$ de l'expression de u , on aura toujours $u = 1$. Mais quand, en adoptant cette dernière hypothèse, on regarde la somme

$$\frac{dP_1}{dx_1} + \frac{dP_2}{dx_2} + \dots + \frac{dP_n}{dx_n}$$

comme ayant une certaine valeur ϕ différente de zéro, alors il vient

$$u = e^{\int_0^t \phi dt}.$$

Prinzip einer Methode zur Herstellung von Kanalstrahlen hoher Voltzahl.

Von

GUSTAF ISING.

Mit 2 Figuren im Texte.

Mitgeteilt am 12. März 1924 durch C. W. OSEEN und M. SIEGBAHN.

Die folgenden Zeilen beabsichtigen eine Methode zu skizzieren, welche im Prinzip erlaubt, mit einer zu Verfügung stehenden mässigen Spannung Kanalstrahlen (ev. Kathodenstrahlen) beliebiger Voltzahl zu erzeugen. Dies soll dadurch erreicht werden, dass die Strahlenpartikel während ihrer Bahn die Spannung mehrmals durchlaufen müssen. Die Spannung wird als Ladungswellen längs Drähten an verschiedenen Stellen des Teilchenbahns mit passenden Zeitdifferenzen zugeführt.

Eine diesbezügliche Anordnung zeigt schematisch die Fig. 1: Von dem Entladungsraum links treten Kanalstrahlen durch die geerdete Kathode K nach rechts in das gut evakuierte Accelerationsrohr A ein. In diesem befinden sich eine Reihe zylindrischer Metallkäfige 1, 2, 3 ..., deren Enden mit Drahtgitter verschlossen sind. Die Käfige sind durch die verschieden langen Drähte $a_1, a_2, a_3 \dots$ über den grossen Widerstand R (ev. auch eine Selbstinduktionsspule L) geerdet und besitzen somit im allgemeinen die Spannung Null gegen Erde. In diesem Falle gehen die Partikel durch die Zylinderreihe hin mit der konstanten Geschwindigkeit, welche sie im Entladungsraum erhielten. Wenn aber eine Funke bei F überschlägt¹, wandern Ladungswellen längs der Drähte $a_1, a_2, a_3 \dots$

¹ E ist eine Elektrizitätsquelle, R_1 und R_2 grosse Widerstände, C eine Kapazität.

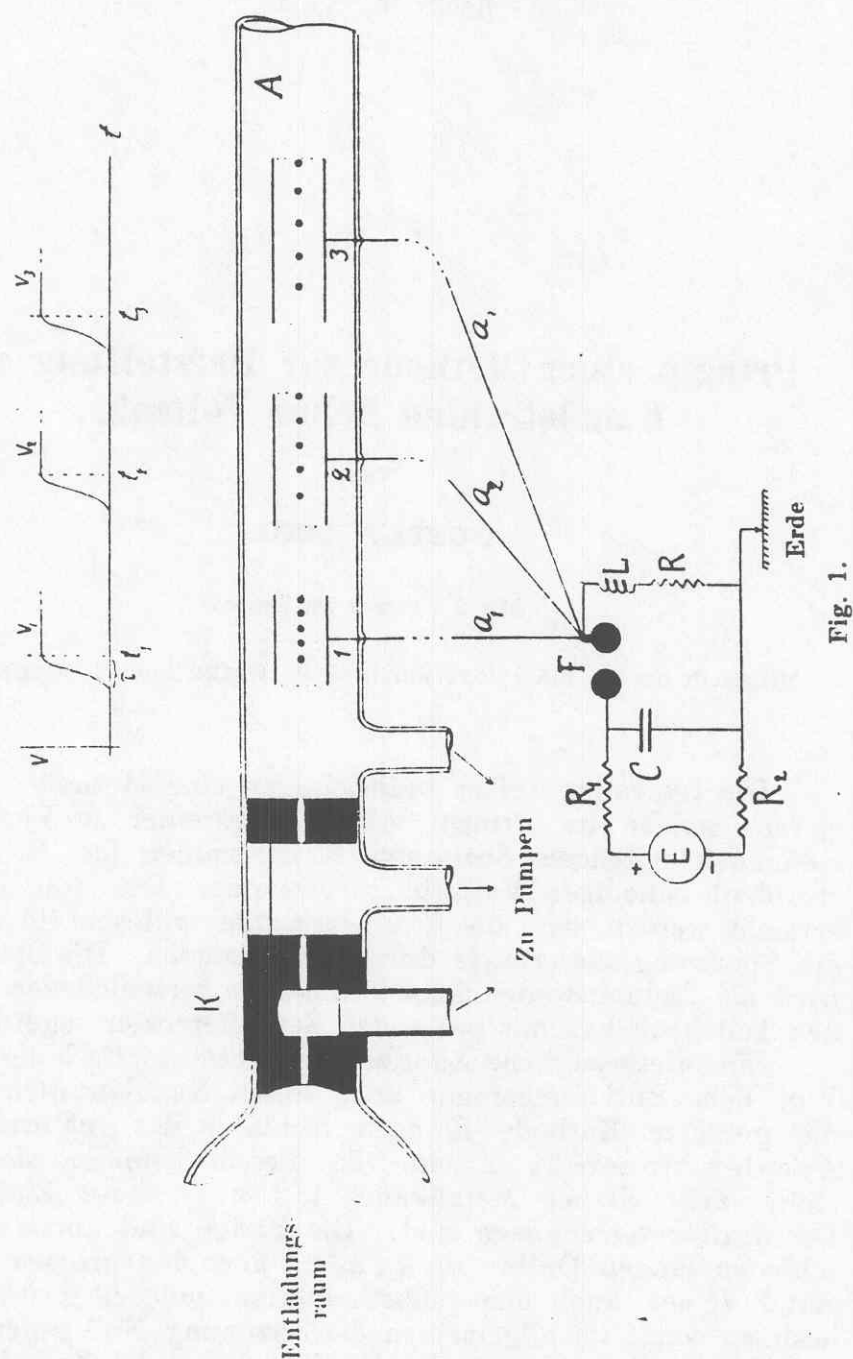


Fig. 1.

nach den Zylindern; die Längen der Drähte (und der Zylinder) sind so bemessen, dass diejenigen Teilchen, welche bei Ankunft der Welle an den Zylinder 1 sich in diesem befinden, gerade Zeit genug haben in den Käfig 2 zu schlüpfen, bevor die Ladungswelle an diesen anlangt u. s. w.

Betrachten wir den Vorgang etwas näher an Hand der oberen Figur, welche die Spannung V der Käfige als Funktionen der Zeit schematisch angibt: Zur Zeit t_1 ist gerade die volle Spannung des Käfigs 1 erreicht worden. Diejenigen Strahlenpartikel, welche vor dem Anstieg der Spannung in den Zylinder eingedrungen waren, sind durch Punkte angedeutet; der Abstand vom linken Zylinderende zu dem nächsten Punkte bezeichnet den Weg, den die Partikel in der Zeit τ zurücklegen, welche zur Ausbildung der vollen Spannung am Zylinder nötig ist. — Die Wellenfront ist nicht ganz steil sondern etwas geneigt; nach P. O. PEDERSEN¹ scheint τ von der Grössenordnung 10^{-9} Sek. zu sein. — Bei der späteren Zeit t_2 ist die Spannung des Käfigs 2 gerade voll ausgebildet; die Partikel, welche zu der Zeit t_1 im Zylinder 1 eingeschlossen waren, befinden sich jetzt in 2 in der durch Punkte angedeuteten Lage, u. s. w. Bei jedem Entladungsschlag der Funkenstrecke F wird ein Schwarm von Partikeln diesen successiven Accelerationen unterworfen.²

Ein mechanisches Analogon dieses Vorgangs hat man, wenn das Problem vorliegt, einer Kugel durch Fallen längs geneigten Ebenen eine grosse horizontale Geschwindigkeit zu geben, und dabei die Höhe H der Fallstrecke aus praktischen Gründen begrenzt ist. Das Problem mag in der unten in Fig. 2 gezeichneten Weise gelöst werden:



Fig. 2.

Unter dem horizontalen Bahn der Kugel befinden sich Klötze 1, 2, 3 ... von der Höhe H , welche in dem Augenblicke, wo sie von der Kugel betreten werden, durch äussere Kräfte die Strecke H gehoben werden. Diese Hebung (Erhöhen des Schwerepotentials der Kugel) entspricht genau die Aufladung der Zylinder mit den darin eingedrungenen Partikel. —

¹ On the Lichtenberg Figures, Part II, S. 32 (Math.-Fys. Medd. utg. af Kgl. Danske Vidensk. Selskab IV, 1922).

² Man könnte natürlich auch daran denken, denselben Zweck durch regelmässige elektrische Schwingungen zu gewinnen, welche mit passenden Phasendifferenzen den Zylindern 1, 2, 3 ... zugeführt werden. Aber es dürfte, bei der notwendigerweise sehr geringen Wellenlänge dieser Schwingungen, schwierig sein denselben die gewünschte grosse Intensität zu geben. Auch die zu erwartenden Oberschwingungen machen wohl diesen Weg weniger aussichtsvoll.

Es wäre verfrüht, die Einzelheiten und eventuellen Schwierigkeiten bei der Durchführung dieser Idee jetzt näher zu diskutieren. Ich hoffe bald praktische Versuche ausführen zu können. Bei positiven Strahlen, deren Geschwindigkeit ja auch bei Spannungen von Millionen Volt weit unter der Lichtgeschwindigkeit bleibt, scheint die Methode am meisten versprechend; bei Kathodenstrahlen aber mag der endliche Anstiegszeit τ der Spannung Schwierigkeiten machen.

Stockholm 6. März 1924.



Tryckt den 1 oktober 1924.

Uppsala 1924. Almqvist & Wiksells Boktryckeri A.-B.

The Paths of Ions in the Cyclotron

I. Orbits in the Magnetic Field

L. H. THOMAS

Mendenhall Laboratory of Physics, Ohio State University, Columbus, Ohio

(Received July 11, 1938)

Bethe and Rose maintain in a recent letter and paper that a maximum energy for the beam from a cyclotron is fixed by the incompatibility of the conditions for resonance and focusing when the relativity increase of mass with velocity is taken into account. It is shown below that, while this result holds for a radially symmetrical magnetic field, it is not necessarily true in general; and that for a field varying with polar angle there is an additional focusing effect. If the relative variation of the field with polar angle is of the order of the ratio of the velocity of the ion to the velocity of light, this focusing effect will compensate the defocusing effect of Bethe and Rose. It is shown further that if this variation has period $\pi/2$, a family of stable periodic orbits exists which are nearly concentric circles. The second order effects due to the simultaneous action of the variations with polar angle of the magnetic field and the accelerating electric field will be considered in a second paper.

INTRODUCTION

IN a cyclotron a magnetic field H curves the paths of particles of charge e and mass m so that they describe circuits in time $2\pi/\omega = 2\pi m/eH$. An electric field oscillating in this period continually accelerates those particles that are in phase so that they describe, with increasing velocity v , circuits of radius v/ω . Particles are introduced near the central line and withdrawn near the curved surface of a short cylindrical region of radius A with generators parallel to the magnetic field, when they have attained velocity $A\omega$.

Since the curvature of the path of a particle in a magnetic field is accurately proportional inversely to its momentum $m_0v/\{1-v^2/c^2\}^{1/2} \approx m_0v(1+\frac{1}{2}v^2/c^2)$, where m_0 is its rest mass, and c the velocity of light, the time of description of a circuit will increase with increasing velocity, and the particles will get out of phase and never attain great energy unless the magnetic field increases in the same ratio as the momentum. If the magnetic field, which must have zero curl, increases with distance from the axis, the magnetic lines must curve outwards above and below a median plane to which they are all perpendicular. (Fig. 1). An orbit above that plane will therefore be curved away from it as well as around the axis, and the beam will be defocused: this effect,

discovered by Bethe and Rose,^{1,2} is proportional to the relative change in magnetic field, and so to v^2/c^2 .

If the magnetic field varies with polar angle about the central line, the path of a particle must have greatest curvature where the field is greatest, and if the path is a closed orbit it must have greatest radial distance where the field is greatest (X, Fig. 2). Along a portion of the orbit in a region (A) in which the field decreases as the polar angle increases, the magnetic lines must curve backwards from the median plane to which they are all perpendicular, and lie in cylindrical surfaces about the axis. In this region the orbits have decreasing radial distances and an orbit above that plane will therefore be curved towards it as well as around the axis; and the beam will be focused (Fig. 3). The same is true in a region (B) in which the field and radial distance both increase with polar angle. This effect is proportional to the product of the relative changes in radial distance and in magnetic field and so to the square of the relative change in magnetic field with polar angle.

The above argument holds for a variation of the magnetic field with polar angle that does not depend on the distance from the axis: It is shown below in detail that if the variation depends on

¹ H. A. Bethe and M. E. Rose, *Phys. Rev.* **52**, 1254 (1937).

² M. E. Rose, *Phys. Rev.* **53**, 392 (1938).

139

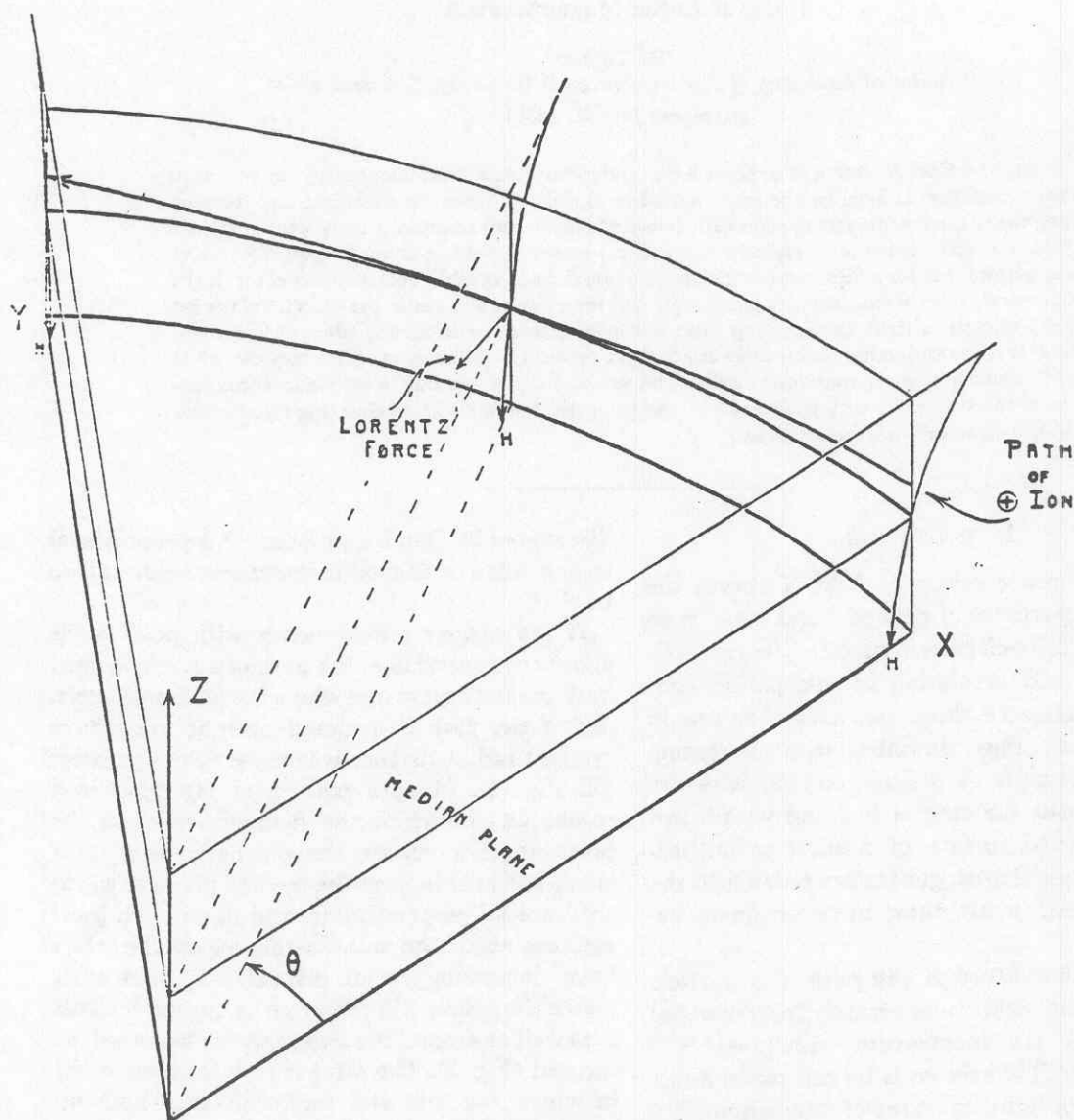


FIG. 1. The defocusing effect of Bethe and Rose.

the distance in such a way as to preserve the time of description of the orbit, the effect is always to focus the beam. A variation of order v/c of the magnetic field with polar angle therefore introduces focusing that will compensate the defocusing effect of Bethe and Rose.

A variation of the magnetic field with position in the median plane will cause a secular change in orbits in that plane regarded as to a first approximation circular. A term in the magnetic field proportional to $\sin \theta$ which we shall suppose is an increase in the y -direction increases the curvature

on the side of the circle for which y is positive and decreases it on the side for which y is negative so that the center moves in the positive x -direction (Fig. 4) by an amount per circuit proportional to the product of the radius of the orbit and the change in magnetic field between the two sides.³ In this case there are no closed orbits.

A term in the magnetic field proportional to $\sin 2\theta$, which we shall suppose is an increase in

³ I am indebted to a conversation with Professor Bethe for this simple discussion of stability in terms of secular change. See also II §3 below.

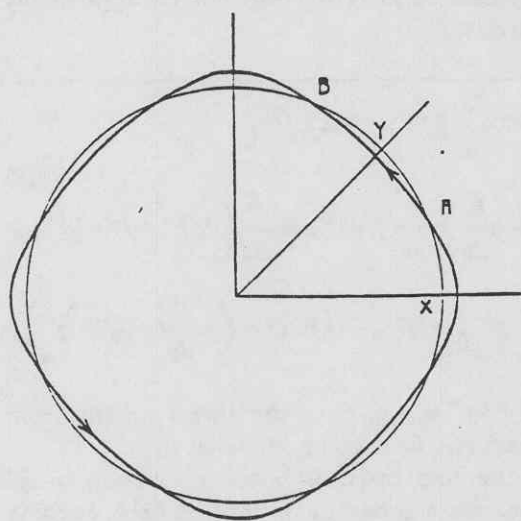


FIG. 2. A periodic orbit in a magnetic field varying with polar angle. (For a positive ion the magnetic field is directed away from the reader.)

both directions for which $x=y$, causes the center to move away from $x=0$ by an amount per circuit proportional to the product of the variation of the magnetic field around the orbit and the distance of the center from $x=0$, as the magnetic field is then greater on the left side by an amount proportional to the product of the ratio of that distance to the radius of the orbit and the variation of the magnetic field around the orbit; and to move towards $y=0$ in a similar way.³ In this case there is a family of closed orbits but they are unstable.

Thus such terms in the magnetic field will cause particles to approach the outside of the cyclotron along paths of various radii and with various energies; and may, if large enough, so disturb the phase adjustment that the particles will never gain great energy.

It is shown in detail below that a variation of magnetic field proportional to $\cos 4\theta$, or, more generally, any variation periodic with period $\pi/2$ in θ , admits a *stable* family of closed orbits that are approximately circles about the center of the cyclotron.

Thus a variation of the magnetic field with angle, periodic with period $\pi/2$ in θ , approximately proportional to $\cos 4\theta$, where θ may be measured from any initial direction, and of order of magnitude v/c ; together with nearly the radial increase of relative amount $\frac{1}{2}v^2/c^2$ of Bethe and

Rose; gives stable orbits that are in resonance and not defocused.

1. NOTATION

The equations of motion of a particle of charge e , rest mass m_0 , and velocity v , in cylindrical polar coordinates r, θ, z , with the time as independent variable, in magnetic field (H_r, H_θ, H_z) , are

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(m \frac{dr}{dt} \right) - mr \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 &= -e \left(r \frac{d\theta}{dt} H_z - \frac{dz}{dt} H_\theta \right), \\ r \frac{d}{dt} \left(m \frac{d\theta}{dt} \right) + 2m \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} &= -e \left(\frac{dz}{dt} H_r - \frac{dr}{dt} H_z \right), \\ \frac{d}{dt} \left(m \frac{dz}{dt} \right) &= -e \left(\frac{dr}{dt} H_\theta - r \frac{d\theta}{dt} H_r \right), \end{aligned} \quad (1.1)$$

where $mv = m_0 v / (1 - v^2/c^2)^{1/2}$ is the momentum, (1.2)

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \quad (1.3)$$

and c is the velocity of light: e is in electrostatic units and the magnetic field in electromagnetic units: and a right-handed screw rotating in the direction of θ increasing travels along the positive z -direction.

The magnetic field must satisfy

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \theta} - \frac{\partial H_\theta}{\partial z} &= 0, \quad \frac{\partial H_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} H_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial H_r}{\partial \theta} = 0, \\ \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} &= 0, \quad \frac{\partial H_r}{\partial r} + \frac{1}{r} H_r + \frac{1}{r} \frac{\partial H_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

We shall suppose that in the median plane $z=0$, $H_\theta=0$, $H_r=0$, so that also $\partial H_z / \partial z = 0$, and that the field is symmetrical about this plane, so that for small z

$$\begin{aligned} H_z &= -H + 0(z^2), \\ H_r &= -z(\partial H / \partial r) + 0(z^3), \\ H_\theta &= -(z/r)(\partial H / \partial \theta) + 0(z^3), \end{aligned} \quad (1.5)$$

where H can be adjusted to be any function of r and θ periodic with period 2π in θ . The negative sign is taken so that if H is a positive constant the orbits in the median plane are circles described in the direction of θ increasing.

We see that a discussion of focusing based on separate consideration of the electric field such as that given by Rose and by Wilson and of the magnetic field as in (I(4)) will not be appreciably affected by the coexistence of the electric and magnetic fields.

7. STABILITY

We find the variational equations for motion in the plane $z=0$ by writing

$$r = a(1 + \epsilon f) + \varphi, \quad \omega t = \theta - \alpha + \epsilon v + \tau \quad (7.1)$$

in place of (4.4) and (4.5), substituting in (4.1) and (4.2), and taking the terms linear in φ and τ . There results a system of linear differential equations for φ and τ of the fourth order, of which we know two independent solutions, obtained by varying the constants of integration of (4.8) and (4.9), and representing displacements to neighboring central orbits. We use these two known solutions to reduce the fourth order system to a second order system which represents the departure from the central orbits. This second order system reduces to a normal form (cf. I(5.4)) to terms of the second order in ϵ

$$\psi'' - \psi[1 + \epsilon p - \epsilon^2 q] = 0, \quad (7.2)$$

where p is an expression linear in f , v , h , u , v , and their derivatives, and q is quadratic in these and linear in k , l , m .

To the first order in ϵ (cf. I(5.8)) the stability depends on $\langle p \cos 2\theta \rangle_{av}$, $\langle p \sin 2\theta \rangle_{av}$, and $\langle p \rangle_{av}$. For a magnetic field given by (4.12) and (4.14), as in I, the contributions to these expressions all vanish. As we shall see immediately the contributions due to the accelerating electric field do not vanish. As a increases the ratio of the contributions from the magnetic field to those from the electric field increases. Thus, for small a only the terms from the electric field in p need be taken into account; for large a only the terms from the magnetic field in q ; the terms from the electric field, and the cross product terms, in q , can always be neglected, whatever a .

The terms from the electric field in p can be obtained most directly from (3.2); the terms from the magnetic field in p and q were given before (I(5.5), (5.6)), so that, with (4.12), (4.14), (I(5.6), (2.14))

$$p = u \sin(\theta - \alpha) - v \cos(\theta - \alpha) - \frac{3}{2}f'' - a \frac{d}{da}(f + f''),$$

$$q = \frac{9}{4}f'^2 + \frac{3}{2}(ff'' + f''^2 + f'f''') \quad (7.3)$$

$$- \left(f - a \frac{df}{da} \right) a \frac{d}{da}(f + f'') + a \frac{d}{da} \left(2ff'' + f^2 + \frac{1}{2}f' + k \right. \\ \left. - \langle 2ff'' \rangle_{av} - \langle f^2 \rangle_{av} - \langle \frac{1}{2}f' \rangle_{av} - \left\langle f a \frac{d}{da}(f + f'') \right\rangle_{av} \right),$$

where $f + f'' = -h$, only the terms arising from the magnetic field being included in f .

To the first order in ϵ the discussion in §3 applies. For a general accelerating field, keeping in phase, there is a stable oscillation. For a field between dees, $\langle p \cos^2 \theta \rangle_{av} \approx \langle p \rangle_{av}$, $\langle p \sin 2\theta \rangle_{av} \approx 0$, and the exponents, given by (I(5.8))

$$D^2 = \frac{1}{2}\epsilon^2 [\langle p \cos 2\theta \rangle_{av} + \langle p \sin 2\theta \rangle_{av} - \langle p^2 \rangle_{av}]$$

are zero. This case differs from that considered in (I(5)), under the above magnetic field alone, in that the terms in D^2 merely cancel, and are not zero separately; and there is still motion to the first order in ϵ ; in fact the creep of the center of the orbit parallel to the central line of the dees is at a rate proportional to the distance of the center from that line (§3).

For small a this is the varied motion; for large a the terms of the second order in ϵ considered in (I(5)), only are effective, giving a stable oscillation. A complete investigation would consider the transitional case: this we omit, remarking that since the ratio of the effective terms in the magnetic field to those in the electric field is proportional to γ^2/u_0 (cf. (6.4)), i.e., to a^4 , the transitional case is relevant only for a small range of a .

8. THE NATURE OF THE PATHS: CONCLUSION

For a magnetic field constant in time, symmetrical about a median plane and in that plane perpendicular to it and periodic with period π about an axis perpendicular to that plane, and for an electric field harmonic in time, symmetrical about the median plane and in that

plane parallel to it and periodic with period π about the axis, there is a two-parameter family of central paths. If the electric field is generally suitable and the magnetic field ((4.12), (4.19)) is within a certain tolerance (5.7) of that giving exact resonance (5.8), a pencil of these paths are spirals from the center to the outside (a one-parameter family actually pass through the center). Other paths near the central paths oscillate about the central paths if these are focused for motion out of the median plane and stable for motion in it.

Three regions may be distinguished. (A) Near the center, where the ions start. All the ions will be swept up into a beam (§2). The conditions for focusing require a more exact treatment than that given here (cf. Wilson, reference 3). The desirable condition is that at points in phase the electric field near the median plane should have a component towards that plane on the average. Stability is here not of great importance; especially if the electric field were given by quadrants instead of dees (3.7). With dees the particles should leave the central region on concentric circles whose centers depart from the central line of the dees by so small an amount that the creep along the dees that accumulates through the whole motion (3.6) does not become important.

(B) The transition from electric to magnetic control of focusing and stability. In the earlier part the magnetic field should be, if anything,

slightly less than the exact resonance value, so that the ions lag behind the field, and the first order electric term (Rose, reference 2) focuses the beam ((4.5), (6.4), $\alpha < 0$). The electric field from quadrants will give stability (3.7), from dees a slow creep (3.6). In the latter part the magnetic field should have no more than very small terms varying as $\cos \theta$, $\sin \theta$, giving steady creeps of the instantaneous circles, or $\cos 2\theta$, $\sin 2\theta$, which give creeps proportional to the departure from the center (§3 note). Terms in $\cos 4\theta$ and $\sin 4\theta$ are desirable as (6.4) they give focusing without instability. Indeed (I(4.5)) any small variation of the magnetic field with θ periodic in period $\pi/2$ gives focusing without instability.

(C) Where relativistic effects become important. We see that up to terms in v^2/c^2 , no difficulty is to be anticipated. As a variation of magnetic field with angle of order v/c has to be introduced to maintain focusing and resonance. It would be necessary to carry the calculation (I, 2, 3, 4, 5) to higher order in v to predict the effect of still higher terms.

It is concluded that the effective limit to the velocities attainable will be fixed by the possibility of adjusting the magnetic field sufficiently exactly for resonance. It is suggested that the adjustment would be easier and the energy of the resulting beam more uniform if the whole instrument has symmetry about its axis with period $\pi/2$; or at least if the dees were replaced by quadrants.

ANNALS OF PHYSICS: 3, 1-48 (1958)

Theory of the Alternating-Gradient Synchrotron^{*†}

E. D. COURANT AND H. S. SNYDER

Brookhaven National Laboratory, Upton, New York

The equations of motion of the particles in a synchrotron in which the field gradient index

$$n = -(r/B)\partial B/\partial r$$

varies along the equilibrium orbit are examined on the basis of the linear approximation. It is shown that if n alternates rapidly between large positive and large negative values, the stability of both radial and vertical oscillations can be greatly increased compared to conventional accelerators in which n is azimuthally constant and must lie between 0 and 1. Thus aperture requirements are reduced. For practical designs, the improvement is limited by the effects of constructional errors; these lead to resonance excitation of oscillations and consequent instability if $2\nu_x$ or $2\nu_z$ or $\nu_x \pm \nu_z$ is integral, where ν_x and ν_z are the frequencies of horizontal and vertical betatron oscillations, measured in units of the frequency of revolution.

The mechanism of phase stability is essentially the same as in a conventional synchrotron, but the radial amplitude of synchrotron oscillations is reduced substantially. Furthermore, at a "transition energy" $E_1 \approx \nu_x Mc^2$ the stable and unstable equilibrium phases exchange roles, necessitating a jump in the phase of the radiofrequency accelerating voltage. Calculations indicate that the manner in which this jump is performed is not very critical.

1. INTRODUCTION

The particles in a circular magnetic accelerator, such as a synchrotron, cyclotron, or betatron, are confined to the vicinity of their equilibrium orbit by magnetic focusing forces. These forces are conventionally obtained by shaping the magnetic field in such a way that

$$0 < n < 1, \quad (1.1)$$

* This paper is a revised version of a report written by us in 1953 and privately circulated at that time. Many if not most of the results obtained here have also been obtained independently by numerous other authors, especially members of the accelerator design groups at CERN, Geneva; Saclay, France; Harwell, England; and Cambridge, Massachusetts. No attempt has been made here to allocate credit for every single result. Comprehensive accounts of the theory of betatron oscillations, using somewhat different approaches from ours, may be found in references 9, 13, and 14.

† Work done under the auspices of the U. S. Atomic Energy Commission.

which leads to

$$2(c + e) = \Omega a + 4\omega f. \quad (\text{B17})$$

If the reference curve is taken to be an equilibrium orbit of a particle of momentum p , we have

$$b = 0, \quad a = -\Omega p/e. \quad (\text{B18})$$

In this case, by substituting (B15) in (B10) and (B12), we obtain a Hamiltonian G of the form (4.59), and the homogeneous equations of motion used in Sections 2 to 4.

RECEIVED: July 15, 1957

REFERENCES

1. N. C. CHRISTOFILOS, unpublished manuscript (1950).
2. E. COURANT, M. S. LIVINGSTON, AND H. SNYDER, *Phys. Rev.* **88**, 1190 (1952).
3. R. Q. TWISS, AND N. H. FRANK, *Rev. Sci. Instr.* **20**, 1 (1949).
4. J. J. STOKER, "Non-linear Vibrations," Chapter VI. Interscience Publishers, New York, 1950.
5. N. M. BLACHMAN, AND E. D. COURANT, *Rev. Sci. Instr.* **20**, 596 (1949).
6. T. SIGURGEIRSSON, CERN Report CERN-T/TS/2 (Unpublished, 1952).
7. SYMON, D. W., KERST, JONES, LASLETT, AND TERWILLIGER, *Phys. Rev.* **103**, 1837 (1956).
8. D. W. KERST, AND R. SERBER, *Phys. Rev.* **60**, 53 (1941).
9. G. LÜDERS, *Nuovo cimento Suppl.* **2**, 1075 (1955).
10. H. POINCARÉ, "Nouvelles Méthodes de la Mécanique Celeste," Vol. 1, p. 193. Gauthier-Villars, Paris, 1892.
11. H. WEYL, "The Classical Groups," 2nd ed., Chapter VI. Princeton University Press, Princeton, 1946.
12. G. LÜDERS, "Lectures on the Theory and Design of an Alternating-Gradient Proton Synchrotron," p. 45 (CERN, Geneva, 1953).
13. P. A. STURROCK, "Static and Dynamic Electron Optics," Chapter 7. Cambridge Univ. Press, London and New York, 1955.
14. J. SEIDEN, *Ann. phys.* **10**, 259 (1955).
15. D. M. DENNISON, AND T. H. BERLIN, *Phys. Rev.* **69**, 542 (1946).
16. J. MOSER, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen IIa*, No. 6, 87 (1955).
17. P. A. STURROCK, Harwell Report AERE-X/R-1771, 1955 (unpublished) and *Annals of Physics* (to be published).
18. V. VEKSLER, *J. Phys. USSR* **9**, 153 (1945).
19. E. M. McMILLAN, *Phys. Rev.* **69**, 143 (1945).
20. D. BOHM, AND L. L. FOLDY, *Phys. Rev.* **70**, 249 (1946).
21. L. L. GOLDIN, AND D. G. KOSHEAREV, *Nuovo cimento* **2**, 1251 (1955).
22. V. V. VLADIMIRSKII, AND E. K. TARASOV, "Problems of Cyclic Accelerators." USSR Academy of Sciences, Moscow, 1955.
23. H. GOLDSTEIN, "Classical Mechanics," Addison-Wesley Publishing Co., New York, 1953.
24. E. T. WHITTAKER, "Analytical Dynamics," 4th ed., Chapter XII. Cambridge University Press, London and New York, 1937.
25. G. D. BIRKHOFF, "Dynamical Systems," Vol. 9, Chapter IV. American Mathematical Society Colloquium Publication, New York, 1927.